Correction - Examen du 21 janvier - 2h

Exercice 1 *(4 points)*

(i) On remarque que,

$$\forall k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{n+k}{nk+k^3} \geq 0.$$

Le lemme de Fatou implique

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{n+k}{nk+k^3} \leq \liminf_{n\to\infty} u_n.$$

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$.

(ii) Tout d'abord,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 k \log(k)^2 + k^2} \mathbf{1}_{[2,2n]\cap\mathbb{N}}(k) = \frac{1}{k\log(k)^2}.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$,

$$\left| \frac{n^2}{n^2 k \log(k)^2 + k^2} \right| = \frac{1}{k\log(k)^2 + k^2/n^2} \leq \frac{1}{k\log(k)^2}. \quad \text{Or} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log(k)^2} < \infty$$

si bien que

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log(k)^2}.$$

(iii) On fait le changement de variable $u = t/n$ si bien que $\mathrm{d}t = n\mathrm{d}u$, on obtient

$$w_n = \int_0^1 (1+u)\, e^{-u}\, \mathrm{d}u.$$

Ainsi la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est constante et $\lim_{n\to\infty} w_n = w_1$. On peut même calculer w_1 en intégrant par parties

$$w_n = \int_0^1 (1+u)\mathrm{d}(-e^{-u}) = \left[-(1+u)e^{-u}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-u}\mathrm{d}u = 1 - 2e^{-1} + 1 - e^{-1} = 2 - 3e^{-1}.$$

(iv) Écartons d'ores et déjà le cas $n = 0$ pout lequel $x_0 = \infty$. Alors, d'une part

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(t) = \frac{1}{1+t}\mathbf{1}_{]0,1[}(t), \quad \text{presque-partout.}$$

D'autre part, pour tout $n \geq 1$, presque-partout,

$$\left| \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathbf{1}_{]0,\infty[}(t) \right| \leq \frac{1}{1+t}\mathbf{1}_{]0,1]}(t) + \frac{1}{t(1+t)}\mathbf{1}_{]1,\infty[} \in \mathbf{L}^1.$$

On obtient par convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2).$$

Exercice 2 *(4 points)*

L'ensemble Δ est le domaine fermé délimité par l'ellipse d'équation $x^2 - xy + y^2 = 2$. C'est donc un fermé borné, l'intégrande étant continue sur Δ, elle est intégrable. On va donc appliquer le théorème de changement de variable pour les fonctions $\mathbf{L}^1$.

On résoud

$$\varphi(u,v)=(x,y) \iff \left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{2}u-\sqrt{\frac{2}{3}}v \\ y=\sqrt{2}u+\sqrt{\frac{2}{3}}v \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} u=\frac{x+y}{2\sqrt{2}} \\ v=\frac{y-x}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} \end{array}\right. \iff \varphi^{-1}(x,y)=\left(\frac{x+y}{2\sqrt{2}},\frac{y-x}{2\sqrt{\frac{2}{3}}}\right).$$

Ainsi, φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ inversible, d'où l'on déduit que c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Il faut ensuite calculer le déterminant de la jacobienne de φ :

$$|\det D\varphi(u,v)|=\left|\det\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}\right|=\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Enfin, en remplaçant x,y dans $x^2-xy+y^2\leq 2$, on obtient

$$\varphi^{-1}(\Delta)=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u^2+v^2\leq 1\}=D^1.$$

La formule du changement de variable implique donc que

$$I=\int_\Delta x^2-xy+y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{\sqrt{3}}\int_{D^1}u^2+v^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

On introduit l'application $\psi :]0,\infty[\times[0,2\pi[\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ définie par

$$\psi(\rho,\theta)=(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)),\quad \rho\in]0,\infty[,\theta\in[0,2\pi[.$$

On remarque facilement que ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1]\times[0,2\pi[$ dans $D^1\setminus\{0\}$. De plus,

$$|\det D\psi(\rho,\theta)|=\rho.$$

D'où, à nouveau à l'aide de la formule du changement de variable et le théorème de Fubini pour les fonctions mesurables positives,

$$I=\frac{8}{\sqrt{3}}\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho^3\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho=\frac{16\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1=\frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 3 *(7 points)*

1. Par définition

$$\widehat{\mu}(0)=\int_\mathbb{R}\mu(\mathrm{d}x)=1$$

car μ est une mesure de probabilité.

2. On va appliquer deux fois le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale puis une fois le théorème de continuité. Pour ce faire, on note $f:\mathbb{R}^2\ni(t,\xi)\to e^{it\xi}\in\mathbb{C}$. Nous vérifions
   (a) pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, $t\to f(t,\xi)$ est $\mathcal{C}^2$;
   (b) pour tout $t\in\mathbb{R}$, $t\to f(t,\xi)$ est intégrable ;
   (c) pour tout $(t,\xi)\in\mathbb{R}^2$:

$$|f(t,\xi)|\leq 1,\qquad \left|\frac{\partial}{\partial t}f(t,\xi)\right|\leq|\xi|,\qquad \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,\xi)\right|\leq|\xi^2|.$$

   Puisque μ est une probabilité admettant un moment d'ordre 2, ces trois dominations sont intégrables au sens de Lebesgue.

   Le théorème de dérivation sous le signe intégrable implique

$$\widehat{\mu}^{(1)}(t)=\int_\mathbb{R}\frac{\partial}{\partial t}e^{it\xi}\,\mu(\mathrm{d}\xi)=i\int_\mathbb{R}\xi e^{it\xi}\,\mu(\mathrm{d}\xi)\quad\text{et}\quad\widehat{\mu}^{(2)}(t)=\int_\mathbb{R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{it\xi}\,\mu(\mathrm{d}\xi)=-\int_\mathbb{R}\xi^2 e^{it\xi}\,\mu(\mathrm{d}\xi).$$

   Les identités demandées s'obtiennent en posant $t=0$.

3. (a) Comme $\widehat{\mu}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, un développement de Taylor de $t \to \widehat{\mu}(t)$ et $t \to \widehat{\mu}(-t)$

$$\widehat{\mu}^{(2)}(0) = \frac{\widehat{\mu}(t) + \widehat{\mu}(-t) - 2\widehat{\mu}(0)}{t^2} + o(1).$$

(b) À l'aide de la question précédente et en reprenant l'expression de $\widehat{\mu}$ il vient

$$\begin{aligned} -\widehat{\mu}^{(2)}(0) = \lim_{t\to 0,\ t>0} \int_{\mathbb{R}} \frac{2 - e^{it\xi} + e^{-it\xi}}{t^2}\ \mu(\mathrm{d}\xi) &= \lim_{t\to 0,\ t>0} \int_{\mathbb{R}} 2\frac{1-\cos(t\xi)}{t^2}\ \mu(\mathrm{d}\xi) \\ &= \lim_{t\to 0,\ t>0} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{2}{t\xi}\sin\left(\frac{t\xi}{2}\right)\right]^2 \xi^2\ \mu(\mathrm{d}\xi). \end{aligned}$$

(c) À l'aide du lemme de Fatou, pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-A}^{A} \xi^2\ \mu(\mathrm{d}\xi) &= \int_{-A}^{A} \lim_{t\to 0,\ t>0} \left[\frac{2}{t\xi}\sin\left(\frac{t\xi}{2}\right)\right]^2 \xi^2\ \mu(\mathrm{d}\xi) \\ &\leq \liminf_{t\to 0,\ t>0} \int_{-A}^{A} \left[\frac{2}{t\xi}\sin\left(\frac{t\xi}{2}\right)\right]^2 \xi^2\ \mu(\mathrm{d}\xi) \\ &\leq \liminf_{t\to 0,\ t>0} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{2}{t\xi}\sin\left(\frac{t\xi}{2}\right)\right]^2 \xi^2\ \mu(\mathrm{d}\xi) = -\widehat{\mu}^{(2)}(0). \end{aligned}$$

(d) Par convergence monotone,

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^2\ \mu(\mathrm{d}\xi) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} |\xi|^2\ \mu(\mathrm{d}\xi) \leq -\widehat{\mu}^{(2)}(0) < \infty.$$

Ainsi, μ admet un moment d'ordre 2.

4. (a) On calcule

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\mu(\mathrm{d}x) = \sum_{|k|\geq 2} \frac{|k|c}{k^2\ln(k)} = \infty.$$

(b) Par définition, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\widehat{\mu}(t) - 1}{t} = \sum_{|k|\geq 2} \frac{e^{itk} - 1}{t} \frac{c}{k^2\ln(k)} = -2c\sum_{n\geq 2} \frac{1-\cos(nt)}{tn^2\ln(n)}.$$

(c) Considérons la séries à termes positifs

$$\frac{1}{t}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1-\cos(nt)}{n^2\ln(n)}. \tag{1}$$

Pour tout $t \in (0, \frac{1}{2})$, nous découpons la série suivant que n est plus grand ou plus petit que $1/t$. En remarquant que $x \to (\ln(x))^{-1}$ et $x \to x^{-2}$ sont décroissantes, on obtient d'une part

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\sum_{n\geq 1/t} \frac{1-\cos(nt)}{n^2\ln(n)} \leq -\frac{2}{t\ln(t)} \sum_{n\geq\lfloor\frac{1}{t}\rfloor} \frac{1}{n^2} \leq -\frac{2}{t\ln(t)} \int_{\lfloor\frac{1}{t}\rfloor}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ = -\frac{2}{t\left(\lfloor\frac{1}{t}\rfloor - 1\right)\ln(t)} \leq -2\frac{\lfloor\frac{1}{t}\rfloor + 1}{\lfloor\frac{1}{t}\rfloor - 1}\frac{1}{\ln(t)} \to_{t\to 0} 0. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité, $1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, il vient

$$\frac{1}{t}\sum_{2\leq n<1/t} \frac{1-\cos(nt)}{n^2\ln(n)} \leq t\sum_{2\leq n<1/t} \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{t}{\ln(2)} + t\sum_{3\leq n\leq\lfloor\frac{1}{t}\rfloor} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)} \leq \frac{t}{\ln(2)} + t\int_0^{\frac{1}{t}} \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)}.$$

Il reste donc à montrer que le second terme tend vers 0. Pour cela, il suffit de remarque

$$\int_2^y \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)} \to_{y\to\infty} \infty$$

si bien que la règle de l'Hôpital implique

$$\frac{\int_2^y \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x)}}{y} \sim_{y\to\infty} \frac{1}{\ln(y)} \to_{y\to\infty} 0.$$

Remarque : La démonstration de la dérivabilité de $\widehat{\mu}$ sur $\mathbb{R}$ se montre de façon relativement classique (convergence uniforme), la difficulté est essentiellement pour les points de $2\pi\mathbb{Z}$.

(d) Par symétrie, la limite en 0^- de la question précédente est également nulle. La fonction $\widehat{\mu}$ est donc dérivable à gauche et à droite en 0 et les deux dérivées coïncident. Ainsi, elle est dérivable en 0 et $\widehat{\mu}^{(1)}(0) = 0$.

(e) Du caractère $\mathcal{C}^2$ de la transformée de Fourier de la probabilité μ nous avons pu déduire qu'elle admettait un moment d'ordre 2. Il n'est en revanche pas suffisant que $\widehat{\mu}$ soit dérivable pour qu'elle admette un moment d'ordre 1. Notons tout de même que nous n'avons rien dit a priori sur la continuité de $\widehat{\mu}^{(1)}$.

Exercice 4 *(7 points)*

1. On vérifie les trois axiomes d'une tribu :
   (a) $\emptyset$ est évidemment dénombrable donc $\emptyset \in \mathcal{X}$.
   (b) si $A \in \mathcal{X}$ alors soit A soit $A^{\complement}$ est dénombrable si bien que l'un des deux ensembles $A^{\complement}$ ou $(A^{\complement})^{\complement}$ est dénmbrable, c'est à dire $A^{\complement} \in \mathcal{X}$.
   (c) si $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ alors de deux choses l'une : soit tous les A_n sont dénombrables et alors $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ est dénombrable comme la réunion dénombrable d'ensembles dénombrables ; soit il existe n_0 tel que $A_{n_0}^{\complement}$ est dénombrable et alors

$$\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right)^{\complement} = \bigcap_{n\geq 0} A_n^{\complement} \subset A_{n_0}^{\complement}$$

   si bien que $\bigcup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{X}$. *C'est à ce niveau que nous utilisons l'axiome du choix dénombrable.*

2. Comme $\emptyset \in \mathcal{X}$ est dénombrable, $\nu(\emptyset) = 0$. Soit $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{X}$ deux à deux disjoints alors il ne peut exister dans cette collection deux ensembles indénombrables. Soit en effet A_{i_0} et A_{i_1} deux tels ensembles : ils satisfont $A_{i_0} \cap A_{i_1} = \emptyset$ et donc par passage au complémentaire $A_{i_0}^{\complement} \cup A_{i_1}^{\complement} = \mathbb{X}$. Cette dernière égalité est en contradiction avec le caractère indénombrable de $\mathbb{X}$. Ainsi,
   (a) soit, $A_1, \dots, A_n$ sont tous dénombrables et l'égalité suivante est immédiatement satisfaite

$$\sum_{k=1}^n \nu(A_k) = 0 = \nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

   puisque la réunion finie d'ensembles dénombrables est dénombrable ;
   (b) ou bien, il existe un unique ensemble A_{i_0} parmi $A_1, \dots, A_n$ qui est indénombrable de sorte que

$$\sum_{k=1}^n \nu(A_k) = 1 = \nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)$$

   puisque $A_{i_0} \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$.

   Soit maintenant $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante alors
   (a) si $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ est débombrable alors tous les A_n le sont ;
   (b) si $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ est indénombrable alors il existe n_0 tel que $\bigcup_{k=0}^{n_0} A_k$ est indénombrable.

Dans les deux cas,

$$\nu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n).$$

Enfin, $\nu(\mathbb{X}) = 1$.

3. Soit $A \in \mathbb{X}$ tel que $\mu(A) = 0$, alors $A = \emptyset$ et $\nu(A) = 0$.
4. Par définition,

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \nu(\mathbb{X}) = 1$$

si bien que $f \in \mathbf{L}^1(\mu)$.

5. À l'aide de l'inégalité de Markov,

$$\mu(f > 1/n) \leq n \int f \, \mathrm{d}\mu.$$

6. En terme ensembliste,

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n\geq 1} \{f > 1/n\}.$$

Par la question précédente, il vient que $\{f \neq 0\}$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis, $\{f \neq 0\}$ est donc au plus dénombrable.

7. Dans cet exemple, ν n'est pas à densité (intégrable) par rapport à μ bien que ν soit absolument continue par rapport à μ. Ceci s'explique par le fait que μ n'est pas σ-finie.