# Examen du 4 novembre 2019 - 2h

***Le sujet comporte 2 pages.*** *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

## Exercice 1 *(4 points)*

*C.f.* les corrections du TD.

## Exercice 2 *(3 points)*

1. *C.f.* la définition du cours.
2. On vérifie les trois points de la définition d'une tribu :
   (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$ : À l'aide la convention rappelée dans l'énoncé et puisque $\emptyset \subset \mathbb{N}$
   $$\emptyset = \bigcup_{j\in\emptyset} A_j \in \mathcal{F}.$$
   (b) Stabilité par passage au complémentaire : Soit $B \in \mathcal{F}$ alors $B = \cup_{j\in J} A_j$ pour un certain sous-ensemble $J \subset \mathbb{N}$. Puisque $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\Omega$,
   $$B^{\complement} = \Omega \setminus B = \bigcup_{j\in J^{\complement}} A_j,$$
   et donc $B^{\complement} \in \mathcal{F}$.
   (c) Stabilité par union dénombrable : Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des ensembles de $\mathcal{F}$. Alors pour chaque $i \in \mathbb{N}$, il existe $J_i \subset \mathbb{N}$ tel que $B_i = \cup_{j\in J_i} A_j$. Il vient
   $$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\in J_i} A_j = \bigcup_{j\in J} A_j,$$
   avec $J = \cup_{i\in\mathbb{N}} J_i$.

## Exercice 3 *(3 points)*

1. *C.f.* la définition du cours.
2. On calcule
   $$\mu(\emptyset|B) = \frac{\mu(\emptyset \cap B)}{\mu(B)} = 0,$$
   car $\mu$ est une mesure. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Alors
   $$\mu(\cup_{n\geq 0} A_n|B) = \frac{\mu((\cup_{n\geq 0} A_n) \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(\cup_{n\geq 0}(A_n \cap B))}{\mu(B)} = \sum_{n\geq 0} \frac{\mu(A_n \cap B)}{\mu(B)} = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n|B),$$
   car la suite $(A_n \cap B)_{n\geq 0}$ est constituée d'ensembles eux à deux disjoints. Enfin,
   $$\mu(\mathbb{X}|B) = \frac{\mu(\mathbb{X} \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(B)}{\mu(B)} = 1.$$
   Ainsi $\mu(\cdot|B)$ est une mesure de probabilité.

3. Par définition
$$\mu(B) = \sum_{k\in B^*} 2^{-k} = \sum_{k\geq 1} 2^{-2k} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$
Puis, pour $\ell \geq 1$
$$\mu(\{2\ell\}|B) = \frac{3}{4^\ell},$$
et $\mu(\{k\}|B) = 0$ partout ailleurs. D'où l'égalité annoncée.

## Exercice 4 *(3 points)*

1. *C.f.* l'énoncé du cours.
2. *C.f.* l'énoncé du cours.
3. Soit $n \geq 1$ alors
$$|f_n(x)| \leq \frac{|\sin(x)|}{x^{2-\frac{1}{n}}}\mathbf{1}_{(0,1)} + \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}$$
qui est positive d'intégrale finie sur $(0,\infty)$ : la singularité en 0 est de l'ordre $x^{1-1/n}$ et cette fonction décroît en $x^2$ en l'infini.
4. (a) Il est immédiat que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) = \frac{\sin(x)}{2x^2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$ et $|f_n(x)|\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) \leq \frac{|\sin(x)|}{x^2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$ qui est intégrable. Donc le théorème de convergence dominée implique
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty f_n(x)\ \lambda(dx) = \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{2x^2}\ \lambda(dx) = \frac{S}{2}.$$
(b) On commence par décomposer
$$\int_0^\infty f_n(x)\ \lambda(dx) = \int_0^1 f_n(x)\ \lambda(dx) + \int_1^\infty f_n(x)\ \lambda(dx).$$
On a déjà montrer la convergence du deuxième terme. Considérons le premier terme. La fonction $f_n(x)\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ étant positive, le lemme de Fatou implique
$$\infty = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{2x^2}\ \lambda(dx) = \int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\ \lambda(dx) \leq \liminf_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\ \lambda(dx).$$

## Exercice 5 *(5 points)*

1. *C.f.* l'énoncé du cours.
2. *C.f.* l'énoncé du cours.
3. Montrons tout d'abord que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour ce faire, on doit vérifier trois points :
— la fonction $t \to e^{-x^2}\cos(2tx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ;
— la fonction $x \to e^{-x^2}\cos(2tx)$ est intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}$ ;
— enfin, $|-2xe^{-x^2}\sin(2tx)| \leq 2|x|e^{-x^2}$ qui est intégrable.
Le théorème de dérivation sous le signe somme implique $F$ est dérivable et
$$F'(t) = -\int_{\mathbb{R}} 2xe^{-x^2}\sin(2tx)\ dx.$$
Nous devons montrer que $F'$ est continue. Là encore, il est nécessaire de vérifier trois points :
— la fonction $t \to -2xe^{-x^2}\sin(2tx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ;
— la fonction $x \to -2xe^{-x^2}\sin(2tx)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$ ;
— enfin, $|-2xe^{-x^2}\sin(2tx)| \leq 2|x|e^{-x^2}$ qui est intégrale.
Ainsi, $F'$ est continue sur $\mathbb{R}$ si bien que $F$ est $C^1$.
4. Nous avons déjà calculé $F'$, puis une intégration par parties
$$F'(t) = -\int_{\mathbb{R}} 2xe^{-x^2}\sin(2tx)\ dx = \int_{\mathbb{R}} \sin(2tx)\ d\left(e^{-x^2}\right) = \left[\sin(2tx)e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} - 2t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2tx)\ dx.$$
Il vient immédiatement que $F'(t) + 2tF(t) = 0$.

5. (a) On pose $(x, y) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \phi(\rho, \theta)$. La fonction $\phi$ est un $C^1$-difféomorphisme de $(0, \infty) \times (0, \frac{\pi}{2})$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Puis, on calcule le Jacobien de $\phi$ :

$$\text{Jac } \phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \implies |\det \text{Jac } \phi(\rho, \theta)| = |\rho|.$$

La formule de changement de variable implique

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{-\rho^2} \, d\theta d\rho = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Nous avons par Fubini pour les fonctions mesurables positives

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} \, dx = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \int_0^\infty e^{-y^2} \, dy = F(0)^2.$$

On en déduit $F(0) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ — notons que l'on choisit la racine positive car on sait $F(0) \geq 0$ comme l'intégrale d'une fonction positive.

(c) Nous avons $F'(t) + 2tF(t) = 0$ donc

$$F(t) = F(0)e^{-\int_0^t 2s \, ds} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{-t^2}.$$