Correction de l'examen du 19 octobre 2017 - 2h

Exercice 1 *(2 points)*

1. On calcule
$$\mu(\emptyset|B) = \frac{\mu(\emptyset \cap B)}{\mu(B)} = 0,$$
car μ est une mesure. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Alors
$$\mu(\cup_{n\geq 0} A_n|B) = \frac{\mu((\cup_{n\geq 0} A_n) \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(\cup_{n\geq 0}(A_n \cap B))}{\mu(B)} = \sum_{n\geq 0} \frac{\mu(A_n \cap B)}{\mu(B)} = \sum_{n\geq 0} \mu(A_n|B),$$
car la suite $(A_n \cap B)_{n\geq 0}$ est constituée d'ensembles eux à deux disjoints. Enfin,
$$\mu(\mathbb{X}|B) = \frac{\mu(\mathbb{X} \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(B)}{\mu(B)} = 1.$$
Ainsi $\mu(\cdot|B)$ est une mesure de probabilité.
2. Par définition
$$\mu(B) = \sum_{k\in B^*} 2^{-k} = \sum_{k\geq 1} 2^{-2k} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$
Puis, pour $\ell \geq 1$
$$\mu(\{2\ell\}|B) = \frac{3}{4^\ell},$$
et $\mu(\{k\}|B) = 0$ partout ailleurs. D'où l'égalité annoncée.

Exercice 2 *(4 points)*

1. La fonction $x \to 1/x^x \mathbf{1}_{]0,1[}(x) = e^{-x\ln x}\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$ est positive. Deplus, $x \to -x\ln x$ est positive bornée sur $]0,1[$. Ainsi, on intègre une fonction positive bornée sur un intervalle bornée, l'intégrale est donc finie.
2. $$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx = \int_0^1 e^{-x\ln x}\, dx = \int_0^1 \sum_{n\geq 0} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}\, dx,$$
en utilisant le développement en série entière de l'exponentielle. La série dans l'intégrale est à termes positifs. Par conséquent, le théorème de Tonelli implique
$$\int_0^1 \sum_{n\geq 0} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}\, dx = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}\, dx.$$
Il est possible d'invoquer le théorème de convergence monotone à la suite des sommes partielles de la série : celle-ci est à termes positifs donc la suite des sommes partielles est une suite croissante de fonctions (mesurables) positives.
3. À l'aide du changement de variables indiqué $x = e^{-y}$,
$$I_{m,n} = \int_0^\infty (-1)^m e^{-ny} y^m e^{-y}\, dy = \int_0^\infty (-1)^m y^m \left(-\frac{e^{-(n+1)y}}{n+1}\right).$$
La formule d'intégration par parties donne
$$I_{m,n} = \left[\frac{(-1)^m y^m}{n+1} e^{-(n+1)y}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{(-1)^m m y^{m-1}}{n+1} e^{-(n+1)y}\, dy.$$
Pour $m \geq 1$, le crochet est nul et on obtient
$$I_{m,n} = -\frac{m}{n+1} I_{m-1,n}.$$
Une récurrence immédiate donne $I_{m,n} = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$. Cette formule est valide pour $m \geq 0$ et $n \geq 1$.

4. La quantité $I_{0,0} = \int_0^1 dx$ est bien définie (en fait il faut juste éviter le cas $n = 0$ et $m \geq 1$. L'exercice consiste à calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} I_{n,n}$, d'où le résultat.

Exercice 3 *(2 points)*

1. La suite d'ensembles mesurables $(\cup_{k\geq n} B_k)_{n\geq 0}$ est décroissante et $\mu(\cup_{k\geq 0} B_k) \leq \sum_{k\geq 0} \mu(B_k) < \infty$ par hypothèse. En utilisant la continuité à droite des mesures, on obient

$$\mu\left(\cap_{n\geq 0} \cup_{k\geq n} \mu(B_k)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{k\geq n} B_k\right).$$

2. En majorant grossièrement

$$\mu\left(\cap_{n\geq 0} \cup_{k\geq n} \mu(B_k)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\cup_{k\geq n} B_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \mu(B_k) = 0,$$

car c'est le reste d'une série convergente. Ce résultat est connu sous le nom de premier lemme de Borel-Cantelli.

Problème 4 *(12 points)*

1. (a) Soit $t > 0$ fixé. Alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \to f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}},$$

est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, on a la majoration pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\left| f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\right) \right| \leq \frac{f(y)}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Le théorème de continuié des intégrales à paramètres donne le résultat.

(b) Il s'agit d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et $\varepsilon > 0$. Montrons la dérivabilité sur $]\varepsilon, \infty[$. Pour cela, on calcule pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial_t \left[f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right] &= f(y) \frac{(x-y)^2}{2t^2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \\ &\quad - f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} t^{-3/2} \end{aligned}$$

De plus, le facteur exponentiel est monotone décroissant en t et $t > \varepsilon$, on obtient donc la majoration

$$\begin{aligned} \left| \partial_t \left[f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right] \right| &\leq \left| f(y) \frac{M}{2\varepsilon^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \right| \\ &\quad + \left| f(y) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \varepsilon^{-3/2} \right|, \end{aligned}$$

où

$$M = \sup_{y\in\mathbb{R}} (x-y)^2 \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}\right) < \infty.$$

Remarquer qu'on travaille à $x \in \mathbb{R}$ fixé !

Le théorème de dérivation sous le sous intégrale donne la dérivabilité de $t \to u(t,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} & f(y) \frac{(x-y)^2}{2t^2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \\ & - f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} t^{-3/2}\, dy. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction en t sous l'intégrale est continue sur $]\varepsilon, \infty[$. En utilisant le même type de domination que la dérivation, on conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $u(t,x)$ est C^1 sur $]\varepsilon, \infty[$. Comme $\varepsilon > 0$ peut être rendu arbitrairement petit, on conclut que u est une fonction C^1 de t sur $]0, \infty[$.

(c) Sans démonstration (les dominations sont toutefois très simillaires), on fixe $t > 0$ et on calcule

$$\begin{aligned}\partial^2_{xx} u(t,x) &= \partial_x \int_{\mathbb{R}} -f(y)\frac{(x-y)}{t} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{1}{t} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} \\ &+ \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{(x-y)^2}{t^2} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}}\end{aligned}$$

On constate que $\partial^2_{xx} u(t,x) = 2\partial_t u(t,x)$.

2. (a) Par l'inégalité de Hölder, $\|u(t,\cdot)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout $t > 0$ en remarquant

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} = 1,$$

comme la densité d'une gaussienne de moyenne x et de variance t (on peut toujours faire le changement de variables $y = x + z\sqrt{t}$.

(b) C'est le changement de variables $y = x + z\sqrt{t}$.

(c) Soit (t_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0. Alors, par continuité de f, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé et tout $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f(x + y\sqrt{t_n})e^{-y^2/2}/\sqrt{2\pi} = f(x)e^{-y^2/2}/\sqrt{2\pi}.$$

De plus, on peut dominer cette suite par la fonction $\|f\|_\infty e^{-y^2/2}/\sqrt{2\pi}$ qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to\infty} u(t_n, x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x + y\sqrt{t_n})e^{-y^2/2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = f(x) \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = f(x).$$

Le résultat vient de la caractérisation séquentielle d'une limite.

(d) Par la question 1.c), $\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\partial_{xx} u(t,x)$. La deuxième condition est une conséquence de 2.c).

(e) En générale, ce n'est pas vrai, par exemple $x \to e^{-|x|}/\sqrt{|x|}$ est intégrable mais non bornée.

(f) Pour remettre les choses dans leur contexte, l'équation de la chaleur modélise l'évolution de la température dans un solide homogène. Ici, il faut imaginer que ce solide est un fil infini sans épaisseur. La fonction f est la condition initiale, c'est à dire la température initiale du système sur ce fil.

La condition f continue bornée paraît réaliste mais ne permet cependant pas de modéliser correctement des situations où la température vaut l'infini en 0 et 0 partout ailleurs. Physiquement, cela consiste à mettre une température T sur un voisinage de 0 de largeur à peu près $1/T$. La limite $T \to \infty$ correspondant à l'idée que, le fil étant très long, le physicien applique une température très grande sur une portion de fil très petite.

Pour une fonction $f \in \mathbf{L}^1$, il faut remarquer que pour tout $t > 0$, $u(t,x) = h_t * f(x)$ où

$$h_t(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}.$$

On vérifie que la famille $(h_t)_{t\geq 0}$ est une approximation de l'unité. En fait, pour être tout à fait raccord avec le cours, pour tout suite (t_n) de réels strictement positifs, $(h_{t_n})_{n\geq 0}$ est une suite d'approximation de l'unité. Quoiqu'il en soit, $\|h_{t_n} * f - f\|_1$ tend vers 0 quand $n \to \infty$ et cela signifie, puisque (t_n) est arbitraire, que $\|h_t * f - f\|_1$ tend vers 0 quand $t \to 0$.

(g) **Exercice facultatif :** Résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d, \\ \lim_{t\to 0^+} u(t,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$