Examen du 18 octobre 2018 - 2h

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(3 points)*

1. Soit $n \geq 1$ alors
$$|f_n(x)| \leq \frac{|\sin(x)|}{x^{2-\frac{1}{n}}}\mathbf{1}_{(0,1)} + \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}$$
qui est positive d'intégrale finie sur $(0,\infty)$: la singularité en 0 est de l'ordre $x^{1-1/n}$ et cette fonction décroît en x^2 en l'infini.

2. (a) Il est immédiat que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) = \frac{\sin(x)}{2x^2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$ et $|f_n(x)|\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x) \leq \frac{|\sin(x)|}{x^2}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(x)$ qui est intégrable. Donc le théorème de convergence dominée implique
$$\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty f_n(x)\ \lambda(dx) = \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{2x^2}\ \lambda(dx) = \frac{S}{2}.$$

   (b) On commence par décomposer
$$\int_0^\infty f_n(x)\ \lambda(dx) = \int_0^1 f_n(x)\ \lambda(dx) + \int_1^\infty f_n(x)\ \lambda(dx).$$
On a déjà montrer la convergence du deuxième terme. Considérons le premier terme. La fonction $f_n(x)\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ étant positive, le lemme de Fatou implique
$$\infty = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{2x^2}\ \lambda(dx) = \int_0^1 \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\ \lambda(dx) \leq \liminf_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\ \lambda(dx).$$

Exercice 2 *(5 points)*

1. Montrons tout d'abord que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour ce faire, on doit vérifier trois points :
— la fonction $t \to e^{-x^2}\cos(2tx)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
— la fonction $x \to e^{-x^2}\cos(2tx)$ est intégrable pour tout $t \in \mathbb{R}$;
— enfin, $|-2xe^{-x^2}\sin(2tx)| \leq 2|x|e^{-x^2}$ qui est intégrable.
Le théorème de dérivation sous le signe somme implique F est dérivable et
$$F'(t) = -\int_{\mathbb{R}} 2xe^{-x^2}\sin(2tx)\ dx.$$
Nous devons montrer que F' est continue. Là encore, il est nécessaire de vérifier trois points :
— la fonction $t \to -2xe^{-x^2}\sin(2tx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
— la fonction $x \to -2xe^{-x^2}\sin(2tx)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$;
— enfin, $|-2xe^{-x^2}\sin(2tx)| \leq 2|x|e^{-x^2}$ qui est intégrale.
Ainsi, F' est continue sur $\mathbb{R}$ si bien que F est C^1.

2. Nous avons déjà calculé F', puis une intégration par parties
$$F'(t) = -\int_{\mathbb{R}} 2xe^{-x^2}\sin(2tx)\ dx = \int_{\mathbb{R}}\sin(2tx)\ d\left(e^{-x^2}\right) = \left[\sin(2tx)e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} - 2t\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2tx)\ dx.$$
Il vient immédiatement que $F'(t) + 2tF(t) = 0$.

3. (a) On pose $(x, y) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \phi(\rho, \theta)$. La fonction ϕ est un C^1-difféomorphisme de $(0, \infty) \times (0, \frac{\pi}{2})$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Puis, on calcule le Jacobien de ϕ :

$$\text{Jac } \phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |\det \text{ Jac } \phi(\rho, \theta)| = |\rho|.$$

La formule de changement de variable implique

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \, dxdy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{-\rho^2} \, d\theta d\rho = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Nous avons par Fubini pour les fonctions mesurables positives

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} \, dx = \int_0^\infty e^{-x^2} \, dx \int_0^\infty e^{-y^2} \, dy = F(0)^2.$$

On en déduit $F(0) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$ — notons que l'on choisit la racine positive car on sait $F(0) \geq 0$ comme l'intégrale d'une fonction positive.

(c) Nous avons $F'(t) + 2tF(t) = 0$ donc

$$F(t) = F(0)e^{-\int_0^t 2s \, ds} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{-t^2}.$$

Exercice 3 *(4 points)*

1. Soit $x > 0$, on calcule

$$\int_0^\infty e^{-xy} \, dy = \left[-\frac{e^{-xy}}{x} \right]_0^\infty = \frac{1}{x}.$$

2. Soit $A > 0$, et par Fubini pour les fonctions $\mathbf{L}^1$

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_0^A \sin(x) \int_0^\infty e^{-xy} \, dy \, dx = \int_0^\infty \int_0^A \sin(x) e^{-xy} \, dxdy.$$

3. (a) Soient $y > 0$ et $A > 0$, on calcule

$$\int_0^A \sin(x) e^{-xy} \, dx = \int_0^A \mathsf{Im} \, e^{ix-xy} \, dx = \mathsf{Im} \left[\frac{e^{ix-xy}}{i-y} \right]_0^A$$
$$= \mathsf{Im} \, \frac{e^{A(i-y)} - 1}{i - y} = -\frac{\cos(A)e^{-Ay} - 1 + y\sin(A)e^{-Ay}}{1 + y^2}.$$

(b) Nous avons par définition d'une intégrale impropre puis par la question 2.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin(x)}{x} \, dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^\infty \int_0^A \sin(x) e^{-xy} \, dxdy$$
$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(A)e^{-Ay} - y\sin(A)e^{-Ay}}{1 + y^2} \, dy.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial_A} \frac{1 - \cos(A)e^{-Ay} - y\sin(A)e^{-Ay}}{1 + y^2} = \frac{\sin(A)e^{-Ay} + y\cos(A)e^{-Ay} - y\cos(A)e^{-Ay} + y^2\sin(A)e^{-Ay}}{1 + y^2}$$
$$= \sin(A)e^{-Ay}.$$

On déduit facilement, pour $y \geq 0$ fixé, que $A \to \frac{1-\cos(A)e^{-Ay} - y\sin(A)e^{-Ay}}{1+y^2}$ admet des extrema locaux en $A \in \{k\pi : k \geq 0\}$ si bien que

$$\sup_{A \geq 0} \left| \frac{1 - \cos(A)e^{-Ay} - y\sin(A)e^{-Ay}}{1 + y^2} \right| \leq \frac{2}{1 + y^2}.$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de convergence dominée implique

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \lim_{A\to\infty} \frac{1-\cos(A)e^{-Ay} - y\sin(A)e^{-Ay}}{1+y^2}dy$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,dy = [\arctan(x)]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4 *(8 points)*

1. Comme $O_a \subset A$, il vient que $\lambda(O_a) \leq \lambda(A)$. Puis, en majorant brutalement
$$\lambda(A) \leq \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{q} 2\frac{a^q}{q} = \sum_{q=1}^{\infty} 2a^q = \frac{2a}{1-a}.$$
2. L'ensemble K_a n'est rien d'autre que le complémentaire O_a dans $[0,1]$ *i.e.* $K_a = [0,1]\setminus O_a$, ainsi, puisque $\lambda(0_a) < \infty$, on obtient $\lambda(K_a) = 1 - \lambda(O_a)$. De la question précédente, il vient l'estimation suivante $\lambda(K_a) \geq 1 - \frac{2a}{1-a} = \frac{1-3a}{1-a}$. Donc $\lambda(K_a) > 0$ dès que $a > 1/3$.
3. Si $x \in \mathbb{Q}\cap(0,1)$, alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $x = p/q$ et puisque $x \in (0,1)$, $p \in \{1,\ldots,q\}$. Aussi, $x \in A \cap (0,1) = Q_a$.
4. Si on suppose que K_a contient un intervalle ouvert alors cet ouvert intersecte $\mathbb{Q}$ car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. De là, on déduit que $K_a \cap O_a \neq \emptyset$ puisque O_a contient tous les rationnels de $(0,1)$. C'est une contradiction.
5. L'ensemble A est une réunion (dénombrable) d'intervalles ouverts donc O_a est ouvert comme l'intersection de deux ouverts. Quant à K_a c'est l'intersection du fermé $[0,1]$ avec le complémentaire d'un ouvert, c'est un fermé. Il est borné puisque dans $[0,1]$.

Nous avons donc construit un ensemble compact qui ne contient aucun intervalle ouvert et qui est pourtant de mesure strictement positive.