Examen du 4 novembre 2019 - 2h - Correction

Exercice 1 *(6 points)*

C.f. cours.

Exercice 2 *(2 points)*

Pour presque tout $x, y, z \in [0,1]^2$, nous avons l'égalité

$$\frac{1}{1-xyz} = \sum_{n\geq 0} x^n y^n z^n.$$

Puis, par convergence monotone, les termes de la somme étant positifs, il vient que

$$I = \int_{[0,1]^3} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1-xyz} = \sum_{n\geq 0} \int_{[0,1]^3} x^n y^n z^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \int_0^1 y^n \mathrm{d}y \int_0^1 z^n \mathrm{d}z = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^3},$$

où l'avant dernière égalité est une conséquence de Fubini.

Exercice 3 *(4 points)*

1. On commence par écrire la définition, puis on fait le changement de variable $s = x - y$ d'où l'on conclut qu'il s'afit de calculer la norme 1 d'un produit de convolution,

$$\begin{aligned}\|M_h(f)\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |M_h(f)(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2h}\int_{\mathbb{R}^2} |f(s)|\mathbf{1}_{[x-h,x+h]}(s)\ \mathrm{d}s\mathrm{d}x = \frac{1}{2h}\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{[-h,h]}|f(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ = \left\| |f| * \frac{1}{2h}\mathbf{1}_{[-h,h]} \right\|_1 \leq \|f\|_1 \frac{1}{2h}\|\mathbf{1}_{[-h,h]}\|_1 = \|f\|_1.\end{aligned}$$

2. On remarque $M_h(f) = f * (2h)^{-1}\mathbf{1}_{[-h,h]}$, il nous suffit donc de montrer que $(2h)^{-1}\mathbf{1}_{[-h,h]}$ est une approximation de l'unité :
   - pour tout $h > 0$, $\int_{\mathbb{R}} (2h)^{-1}\mathbf{1}_{[-h,h]}(x)\mathrm{d}x = 1$;
   - $\sup_{n\geq 0} \int_{\mathbb{R}} |(2h)^{-1}\mathbf{1}_{[-h,h]}(x)|\mathrm{d}x < \infty$;
   - soit $\varepsilon > 0$, alors pour tout $h \in (0, \varepsilon/2)$,

   $$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{2h}\mathbf{1}_{[-h,h]}(x)\mathrm{d}x = 0$$

   si bien que

   $$\lim_{h\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{2h}\mathbf{1}_{[-h,h]}(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 4 *(8 points)*

1. D'une part, on a

$$\mu\otimes\nu(A) = \int \mathbf{1}_{]a,b]}(x) \int \mathbf{1}_{]a,x]}(y)\ \nu(dy)\mu(dx) = \int_{]a,b]} G(t)\ \mu(dt) - [F(b)-F(a)]G(a).$$

D'autre part,

$$\mu\otimes\nu(A) = \int \mathbf{1}_{]a,b]}(x) \int \mathbf{1}_{[y,b]}(x)\ \mu(dx)\nu(dy) = [G(b)-G(a)]F(b) - \int_{]a,b]} F(t^-)\ \nu(dt).$$

Ces deux quantités sont égales par le théorème de Tonelli d'où l'égalité.

2. (a) Par le théorème de Radon-Nikodym, il existe f, g intégrables et positiives telles que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ respectivement par

$$\mu(A) = \int \mathbf{1}_A f \; d\lambda \quad \text{et} \quad \nu(A) = \int \mathbf{1}_A g \; d\lambda.$$

Enfin, par définition, F et G sont les fonctions de répartitions des mesures μ et ν respectivement d'où les deux égalités annoncée.

(b) On applique l'égalité de la question 1 à ces fonctions de répartition en remarquant que les mesures μ et ν ne chargent pas les singletons si bien que l'on peut fermer les intervalles et remplacer $F(t^-)$ par $F(t)$. On obtient alors

$$\int_{[a,b]} F(x)g(x) \; dx + \int_{[a,b]} f(x)G(x) \; dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

(c) Cette identité est la formule d'intégration par parties.

3. (a) On a immédiatement : $\mu(]1, 7]) = \sum_{k=2}^{7} u_k$.

(b) On applique la question 1 aux mesures μ et ν en prenant garde au caractère ouvert/fermé des bornes et en utilisant l'égalité $F(t^-) = F(t-1)$. Au final, on obtient pour tout $a < b \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=a+1}^{b} F(k-1)g(k) + \sum_{k=a+1}^{b} f(k)G(k) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

En introduisant la notation $\Delta F(k) = F(k) - F(k-1)$ d'où

$$\sum_{k=a+1}^{b} F(k-1)\Delta G(k) + \sum_{k=a+1}^{b} \Delta F(k)G(k) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

(c) Il s'agit en réalité de la transformation d'Abel. Comme exercice, on pourra en déduire le critère d'Abel pour les séries numériques.