Examen du 21 janvier - 2h

Le sujet comporte 2 pages *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontré. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barème est donné à titre indicatif et reflète la difficulté relative des exercices. Il n'est pas nécessaire d'avoir répondu à toutes les questions pour obtenir la note maximale.*

Exercice 1 *(4 points)*

Déterminer, en justifiant, les limites des suites suivantes :

(i) $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n+k}{nk+k^3}$, (ii) $v_n = \sum_{k=2}^{2n} \frac{n^2}{k\log(k)^2n^2+k^2}$, (iii) $w_n = \int_0^n \frac{1}{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{-t/n}\,\mathrm{d}t$,

(iv) $x_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 *(4 points)*

Soit $\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-xy+y^2\leq 2\}$ et $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(u,v) = \left(\sqrt{2}u - \sqrt{\frac{2}{3}}v, \sqrt{2}u + \sqrt{\frac{2}{3}}v\right).$$

Calculer

$$\int_\Delta x^2 - xy + y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(*Indication :* Δ est le domaine délimité par l'ellipse d'équation $x^2-xy+y^2=2$.)

Exercice 3 *(7 points)*

Soit $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu)$ un espace probabilisé. La transformée de Fourier $\widehat{\mu}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est définie pour tout $t\in\mathbb{R}$ par

$$\widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}\,\mu(\mathrm{d}\xi).$$

La mesure μ admet un moment d'ordre $k\in\mathbb{N}$ si

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^k\,\mu(\mathrm{d}x) < \infty.$$

1. Que vaut $\widehat{\mu}(0)$?
2. On suppose que μ admet un moment d'ordre deux. Montrer que $\widehat{\mu}$ est deux fois continûment différentiable et que les dérivées première et seconde en 0 satisfont

$$\widehat{\mu}^{(1)}(0) = i\int_{\mathbb{R}} x\,\mu(\mathrm{d}x) \quad \text{et} \quad \widehat{\mu}^{(2)}(0) = -\int_{\mathbb{R}} x^2\,\mu(\mathrm{d}x).$$

3. Dans cette question, on suppose que $\widehat{\mu}$ est deux fois continûment différentiable.
   (a) Justifier que

$$\widehat{\mu}^{(2)}(0) = \lim_{t\to 0,\ t>0} \frac{\widehat{\mu}(t)+\widehat{\mu}(-t)-2}{t^2}.$$

   (b) On rappelle que, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\cos(2a) = 1-2\sin^2(a)$. Montrer que

$$-\widehat{\mu}^{(2)}(0) = \lim_{t\to 0,\ t>0} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{2}{t\xi}\sin\left(\frac{t\xi}{2}\right)\right]^2 \xi^2\,\mu(\mathrm{d}\xi).$$

(c) En déduire que, pour tout $A > 0$,

$$\int_{-A}^{A} \xi^2 \ \mu(\mathrm{d}\xi) \leq -\widehat{\mu}^{(2)}(0).$$

(d) Conclure.

4. Dans cette question, on pose

$$\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}} \frac{c}{k^2 \ln(k)} \delta_k$$

où $c > 0$ est une constante de renormalisation de sorte que $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

(a) Que vaut $\int_{\mathbb{R}} |x| \mu(\mathrm{d}x)$?

(b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\widehat{\mu}(t) - 1}{t} = -2c \sum_{n \geq 2} \frac{1 - \cos(nt)}{tn^2 \ln(n)}.$$

(c) Calculer, en justifiant,

$$\lim_{t \downarrow 0,\ t>0} \frac{\widehat{\mu}(t) - 1}{t}.$$

(d) En déduire que $\widehat{\mu}$ est dérivable en 0 et donner $\widehat{\mu}^{(1)}(0)$.

(e) Commenter.

Exercice 4 *(7 points)*

Soit $\mathbb{X}$ un ensemble indénombrable. On introduit

$$\mathcal{X} = \left\{ A \subset \mathbb{X} : A \text{ ou } A^{\complement} \text{ est dénombrable} \right\}.$$

Soit μ la mesure de comptage sur $\mathcal{X}$:

$$\forall A \in \mathcal{X}, \quad \mu(A) = \begin{cases} +\infty & \text{si } A \text{ est infini,} \\ \mathrm{card}(A) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On introduit l'application $\nu : \mathcal{X} \to \{0, 1\}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{X}, \quad \nu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, soit f une fonction mesurable positive telle que

$$\forall A \in \mathcal{X}, \quad \nu(A) = \int \mathbf{1}_A f \ \mathrm{d}\mu.$$

On admettra l'axiome du choix dénombrable dont une conséquence est que la réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est dénombrable. Nulle autre assertion découlant de l'axiome du choix dénombrable n'est nécessaire dans la suite.

1. Montrer que $\mathcal{X}$ est une tribu.
2. Montrer que ν est une mesure de probabilité.
3. Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.
4. Justifier que f est intégrable par rapport à μ.
5. À l'aide d'une inégalité classique, montrer que

$$\exists K \geq 0 : \quad \forall n \geq 1, \quad \mu(f > 1/n) \leq Kn.$$

6. En déduire que $\{f \neq 0\}$ est au plus dénombrable.
7. Que cela vous inspire-t-il quant au théorème de Radon-Nikodym ?