Examen du 4 novembre 2019 - 2h

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(4 points)*

Déterminer les ensembles suivants :

1. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$;
2. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,\frac{1}{n}\right[$;
3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right[$;
4. $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[k-\frac{1}{n+1},k+\frac{1}{n}\right[$.

Exercice 2 *(3 points)*

Soient Ω un ensemble et $\{A_n : n\in\mathbb{N}\}$ une partition de Ω, *i.e.*, $A_i\cap A_j=\emptyset$ pour tout $i\neq j$ et $\Omega=\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$.

1. Rappeler la définition d'une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{F}=\{\cup_{j\in J}A_j : J\subset\mathbb{N}\}$ est une tribu sur Ω. *(On rappelle la convention pour $J=\emptyset$: $\cup_{j\in\emptyset}A_j=\emptyset$).*

Exercice 3 *(3 points)*

Soit $(\mathbb{X},\mathcal{X},\mu)$ un espace mesuré. Soit $B\in\mathcal{X}$ tel que $0<\mu(B)<\infty$. On pose, pour tout $A\in\mathcal{X}$,

$$\mu(A|B)=\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}\in\overline{\mathbb{R}_+}.$$

1. Rappeler la définition d'une mesure et d'une mesure de probabilité.
2. Montrer que $\mu(\cdot|B)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{X},\mathcal{X})$.
3. Supposons à présent que μ est la mesure géométrique de paramètre 1/2 sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par

$$\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\delta_k.$$

Soit $B=2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs. Calculer $\mu(B)$. Pour $k\in\mathbb{N}$, calculer $\mu(\{k\}|B)$. En déduire que

$$\mu(\cdot|B)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{4^k}\delta_{2k}.$$

Exercice 4 *(7 points)*

On considère, pour tout entier $n\geq 1$, la fonction f_n définie sur $(0,+\infty)$ par

$$f_n(x)=\frac{\sin x}{x^2}\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}.$$

1. Énoncer le lemme de Fatou.
2. Énoncer le théorème de convergence dominée.
3. Montrer que, pour tout $n\geq 1$, f_n est intégrable sur $(0,\infty)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, notée λ, sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Exprimer
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} f_n(x)\ \lambda(dx) \quad \text{en fonction de} \quad S = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\ \lambda(dx).$$
   (b) Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} f_n(x)\ \lambda(dx) = \infty.$$

Exercice 5 *(5 points)*

On considère la fonction F définie par
$$F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2tx)\ dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Énoncer le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
2. Énoncer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres.
3. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F'(t) + 2tF(t) = 0$.
5. (a) En faisant le changement de variables en coordonnées polaires
$$(x, y) = \phi(\rho, \theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)),$$
   calculer
$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy.$$
   (b) En déduire $F(0)$.
   (c) En déduire une expression simple de F.