

Examen du 19 octobre 2017 - 2h

Le sujet comporte 2 pages. Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont **interdits**. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être **justifié** de manière **complète et synthétique**. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.

Exercice 1 (2 points)

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $B \in \mathcal{X}$ tel que $0 < \mu(B) < \infty$. On pose, pour tout $A \in \mathcal{X}$,

$$\mu(A|B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} \in \overline{\mathbb{R}_+}.$$

1. Montrer que $\mu(\cdot|B)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.
2. Supposons à présent que μ est la mesure géométrique de paramètre 1/2 sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ définie par

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta_k.$$

Soit $B = 2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs. Calculer $\mu(B)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mu(\{k\}|B)$. En déduire que

$$\mu(\cdot|B) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} \delta_{2k}.$$

Exercice 2 (4 points)

L'objectif de cet exercice est de montrer l'égalité

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

1. Justifier que la fonction $x \rightarrow 1/x^x \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$ est intégrable.
2. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^n}{n!} dx.$$

3. Pour tout $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^n (\ln x)^m dx.$$

Montrer, par récurrence sur m , que

$$I_{m,n} = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

On pourra commencer par faire le changement de variables $x = e^{-y}$.

4. Conclure.

Exercice 3 (2 points)

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré et $(B_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose que $\bigcup_{n \geq 0} B_n$ est de mesure finie. Montrer que

$$\mu \left(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} B_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{k \geq n} B_k \right).$$

2. En déduire que

$$\sum_{n \geq 0} \mu(B_n) < \infty \implies \mu \left(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} B_k \right) = 0.$$

Problème 4 (12 points)

Soit f une fonction continue, positive, intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue) et d'intégrale 1 sur \mathbb{R} . Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp \left(-\frac{(x-y)^2}{2t} \right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}}.$$

1. (a) Montrer que, pour tout $t > 0$, la fonction $\mathbb{R} \ni x \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{R}$ est continue, positive, intégrable (toujours par rapport à la mesure de Lebesgue) et d'intégrale 1 sur \mathbb{R} .
(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{R}_+^* \ni t \rightarrow u(t, x) \in \mathbb{R}_+$ est continûment différentiable sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée partielle $\partial_t u$ (on se contentera d'en donner une forme intégrale).
(c) Calculer (sans justifier) la dérivée partielle seconde $\partial_{xx}^2 u$ de la fonction u par rapport à x . Quel est le lien entre $\partial_{xx}^2 u$ et $\partial_t u$?
2. Dans cette partie, on suppose de plus que $\|f\|_{\infty} < \infty$ (La fonction f étant supposée continue, $\|\cdot\|_{\infty}$ est la norme sup d'une fonction continue).
(a) Montrer que, pour tout $t > 0$, la fonction $x \rightarrow u(t, x)$ est bornée.
(b) Montrer que la fonction u peut également s'écrire

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} : u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + y\sqrt{t}) \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

- (c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = f(x)$.
- (d) Montrer que la fonction u est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- (e) Une fonction positive et Lebesgue intégrable est-elle bornée sur \mathbb{R} ? On donnera une preuve ou un contre-exemple de cette assertion.
- (f) **(Bonus)** Montrer que le résultat de la question 2.(c) reste valide pour la convergence en norme $\|\cdot\|_1$ si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$.

