Examen du 18 octobre 2018 - 2h

***Le sujet comporte 2 pages.** Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont **interdits**. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être **justifié** de manière **complète et synthétique**. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(3 points)*

On considère, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n définie sur $(0,+\infty)$ par

$$f_n(x) = \frac{\sin x}{x^2}\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, f_n est intégrable sur $(0,\infty)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, notée λ, sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Exprimer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} f_n(x)\ \lambda(dx) \quad \text{en fonction de} \quad S = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\ \lambda(dx).$$

   (b) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} f_n(x)\ \lambda(dx) = \infty.$$

Exercice 2 *(5 points)*

On considère la fonction F définie par

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2tx)\ dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F'(t) + 2tF(t) = 0$.
3. (a) Calculer

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy.$$

   (b) En déduire $F(0)$.

   (c) En déduire une expression simple de F.

Exercice 3 *(4 points)*

1. Pour tout $x > 0$, calculer $\int_0^\infty e^{-xy}\ dy$.
2. En déduire que pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\ dx = \int_0^\infty \int_0^A \sin(x)e^{-xy}\ dxdy.$$

3. (a) Pour tout $y > 0$ et $A > 0$, calculer $\int_0^A \sin(x)e^{-xy}\ dx$.

   (b) Montrer que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 *(8 points)*

On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $a \in (0,1)$. On définit les ensembles O_a et K_a par

$$O_a = (0,1)\cap A, \quad \text{où} \quad A = \bigcup_{q=1}^{\infty}\bigcup_{p=1}^{q} \left]\frac{p}{q} - \frac{a^q}{q}, \frac{p}{q} + \frac{a^q}{q}\right[, \quad \text{et} \quad K_a = [0,1]\cap O_a^{\complement}.$$

1. Montrer que $\lambda(O_a) \leq \lambda(A) \leq \sum_{q=1}^{\infty} 2a^q = \frac{2a}{1-a}$.
2. Exprimer $\lambda(K_a)$ en fonction de $\lambda(O_a)$. En déduire qu'il existe $a \in (0,1)$ tel que $\lambda(K_a) > 0$.
3. Montrer que O_a contient tous les rationnels de $(0,1)$.
4. En déduire que K_a ne contient aucun intervalle ouvert.
5. Montrer que O_a est ouvert inclus dans $(0,1)$. En déduire que K_a est fermé et borné (donc compact).