Rattrapage du 10 février 2020 - 2h

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Question de cours *(6 points)*

1. Énoncer le théorème de convergence monotone.
2. Énoncer le théorème de convergence dominée.
3. Énoncer le théorème de Radon-Nikodym.

Exercice 1 *(2 points)*

À l'aide d'une série bien choisie, calculer, en justifiant soigneusement mais succintement, l'intégrale I :

$$I = \int_{[0,1]^3} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1-xyz}.$$

Exercice 2 *(4 points)*

Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue notée λ, on pose pour tout $f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h > 0, \quad M_h(f)(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(s)\mathrm{d}s.$$

1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$, $\|M_h(f)\|_1 \leq \|f\|_1$.
2. Soit $f \in \mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. Montrer que $M_h(f)$ tend vers f dans $\mathbf{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ lorsque h tend vers 0.

Exercice 3 *(8 points)*

Soient μ et ν deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On désigne par F et G leurs fonctions de répartition respectives, c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \mu(]-\infty, x]) \quad \text{et} \quad G(x) = \nu(]-\infty, x]).$$

On notera, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F(t^-) = \lim_{s\uparrow t} F(s)$, la limite à gauche de F en t.

1. Pour des réels fixés a et b, avec $a < b$, on définit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < y \leq x \leq b\}$. En calculant de deux façons différentes $\mu \otimes \nu(A)$, montrer que

$$\int_{]a,b]} F(t^-)\nu(\mathrm{d}t) + \int_{]a,b]} G(t)\mu(\mathrm{d}t) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

2. On suppose que μ et ν sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.
   (a) Justifier l'existence de deux fonctions f et g mesurables positives et intégrables par rapport à Lebesgue telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \ \mathrm{d}\lambda \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} g \ \mathrm{d}\lambda.$$

   (b) En déduire que

   $$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \quad \int_{[a,b]} F(x)g(x) \ dx + \int_{[a,b]} f(x)G(x) \ dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

   (c) Comment appelle-t-on cette égalité ?

3. On suppose maintenant que μ et ν sont des mesures discrètes définies par

$$\mu = \sum_{n \geq 0} u_n \delta_n \quad \text{et} \quad \nu = \sum_{n \geq 0} v_n \delta_n$$

où $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont deux suites de réels sommables. On note par ailleurs les sommes partielles associées

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_n \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_n.$$

   (a) Calculer, en fonction de $(u_n)_{n \geq 0}$, $\mu(]1, 7])$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{n} V_k (U_k - U_{k-1}) = U_n V_n - U_0 V_0 - \sum_{k=1}^{n} U_{k-1} (V_k - V_{k-1}),$$

   avec la convention $\sum_{\emptyset} = 0$.

   (c) Comment appelle-t-on cette dernière identité ?