Rattrapage du 6 février 2019 - 2h00

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Questions de cours *(10 points)*

1. Soit $\mathbb{X}$ un ensemble. Donner la définition d'une tribu $\mathcal{X}$ sur $\mathbb{X}$.
2. Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable. Donner la définition d'une mesure μ sur $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.
3. On munit $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure de comptage que l'on note m. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Calculer $\int f\ dm$.
4. Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}_+$ une application borélienne.
   (a) Que signifie l'assertion : $f = 0$ μ-presque partout ?
   (b) Si $f = 0$ μ-presque partout, que peut-on dire de $\int f\ d\mu$?
5. Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré.
   (a) Énoncer le théorème de convergence monotone (aussi appelé théorème de Beppo-Lévy).
   (b) Énoncer le lemme de Fatou.
   (c) Énoncer le théorème de convergence dominée.
6. Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ et $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Énoncer le théorème de Fubini-Lebesgue.
7. Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. Énoncer le théorème de Radon-Nikodym dans le cas des mesures positives.

Exercice 1 *(4 points)*

Déterminer les ensembles suivants :

1. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$;
2. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[$;
3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$;
4. $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[k - \frac{1}{n+1}, k + \frac{1}{n}\right[$.

Exercice 2 *(2 points)*

Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et μ une application définie pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{X})$

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathsf{card}\ A & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.

Bonus : Comment cette mesure est-elle généralement appelée ?

Exercice 3 *(4 points)*

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}\ dx.$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer les égalités
$$\frac{\sin(x)}{x} = \int_0^1 \cos(xy)\ dy \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x}\ dy.$$
3. Vérifier que $u \to 4\arctan(2u) - \frac{\ln(1+4u^2)}{u}$ est une primitive de $u \to \frac{\ln(1+4u^2)}{u^2}$.
4. En déduire une expression $g(t)$ pour tout $t > 0$.
5. Que vaut $g(0)$? Justifier.