TD1 : Rappels et compléments d'analyse

Exercice 1

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si $A : E \to F$ est une application linéaire continue, on définit

$$\|A\|_{E\to F} := \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_{E,F}$ est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F. Cette norme est appelée *norme subordonnée.*
2. Montrer pour tout $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

$$\|A\|_{E\to F} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}:\|x\|_E\le 1} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E:\|x\|_E=1} \|Ax\|_F.$$

3. Soient $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$, montrer que $\|BA\|_{E\to G} \le \|B\|_{F\to G}\|A\|_{E\to F}$.

Exercice 2

Soit F l'ensemble des fonctions lipshitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application N pour tout $f \in F$ par

$$f \to N(f) = |f(0)| + \sup_{0\le x<y\le 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

Montrer que N est une norme.

Exercice 3

Soit $C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continument dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application N définie pour $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ par

$$f \to N(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

Qu'en est-il de $\tilde{N}$ définie par $\tilde{N}(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$. L'application $\tilde{N}$ définit-elle une norme sur $C := \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$?

Exercice 4

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Pour $(x,y) \in E\times E$, on définit $d(x,y) = \|x-y\|$. Montrer que (E,d) est un espace métrique.

Exercice 5

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on définit $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y\,|$. Montrer que $(\mathbb{R},d)$ est un espace métrique borné.

Exercice 6

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, on définit

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si } 0, x \text{ et } y \text{ sont alignés,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2, d)$ est un espace métrique. Dessiner la boule unité fermée centrée en x lorsque $\|x\|_2 < 1$, $\|x\|_2 = 1$ et $\|x\|_2 > 1$. Pourquoi d ne peut-elle pas être issue d'une norme ?

Exercice 7

Soit E un ensemble. Pour tout $(x,y) \in E\times E$, on définit

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \ne y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que (E,d) est un espace métrique.
On suppose désormais que $E = \{0,1\}$, déterminer la boule ouvert $B(0,1)$, la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ et l'adhérence de la boule ouverte $\overline{B(0,1)}$. Commenter.

Exercice 8

Soit (E,d) un espace métrique et soient A, B deux parties non vides de E. Montrer que l'application $E \ni x \to d(x,A) \in \mathbb{R}$ est 1-Lipschitzienne. En déduire que $\{x \in E : d(x,A) = d(x,B)\}$ est un fermé de E.

Exercice 9

Soit (X,d) un espace métrique.

1. Soit $A \subset X$ un ouvert. Montrer que pour tout $B \subset X$, $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
2. Soient $U, V \subset X$ deux ouverts tels que $U \cap V = \emptyset$ alors $\mathsf{Int}\ \overline{U} \cap \mathsf{Int}\ \overline{V} = \emptyset$.

Exercice 10

Soit $(\mathbb{X},d)$ un espace métrique. Montrer que $A \subset \mathbb{X}$ est ouvert si et seulement il est réunion de boule ouverte.

Exercice 11 *Caractérisation séquentielle de la continuité*

Soient $(\mathbb{X},d)$ et $(\mathbb{X}',d')$ deux espaces métriques. Une fonction $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ est continue en $a \in \mathbb{X}$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergente vers a, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.

Exercice 12 *Lemme de Cesàro*

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$.

1. On pose, pour tout $n \geq 1$, $y_n = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. Montrer que $(y_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ.
2. Si $(c_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n\geq 1} c_n = \infty$, montrer que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n \geq 1$ par $z_n = \frac{c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n}{c_1 + \cdots + c_n}$, converge vers ℓ.

Exercice 13 *Lemme de Stolz-Cesàro*

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels et $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si les séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont convergentes alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{\infty} b_k} = \ell.$$
2. Montrer que si $\sum_n b_n$ est divergente alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} b_k} = \ell.$$

Exercice 14 *Lemme de Kronecker*

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que $\sum_n a_n < \infty$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante non bornée de réels positifs. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} b_k a_k}{b_n} = 0.$$

Exercice 15

Soit l'espace vectoriel $C([0,1],\mathbb{C})$ normé par $\|\cdot\|_\infty$. Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ de norme 1 tel que $\|f_n - f_m\|_\infty \geq 1$ dès que $m \neq n$. Commenter. *(On pourra considérer $f_n(\cdot) = \exp(2in\pi\cdot)$.)*

Exercice 16

Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach pour

1. E de dimension finie muni d'une norme quelconque ;
2. $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$;
3. $E = \ell^p(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$, $p \in [1,\infty]$;
4. $E = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, où F est un espace de Banach, muni de la norme subordonnée $\|\cdot\|_{E\to F}$.

Exercice 17

Soit $\ell^\infty(\mathbb{N}) := \left\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\geq 0} |x_n| < \infty\right\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout $x \in \ell^\infty$ par $\|x\| = \sup_{n\geq 0} |x_n|$. On rappelle que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.
On note C le sous-ensemble de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites convergentes. On note également $c_0(\mathbb{N})$ le sous-ensemble de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites qui convergent vers 0.

1. Montrer que C est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. En déduire que $(C, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Soit L l'application définie sur C qui à $x \in C$ associe sa limite. Montrer que L est une forme linéaire continue sur C. Calculer sa norme.
3. En déduire que $c_0(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel fermé dans C. Est-il fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$?
4. On définit l'application T de C dans $c_0(\mathbb{N})$ associant à la suite $x = (x_n)_{n\geq 0} \in C$ la suite $y = (y_n)_{n\geq 0}$ définie par $y_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $y_n = x_{n-1} - \lim_{k\to\infty} x_k$ pour $n \geq 1$.
   (a) Montrer que T est linéaire continue et calculer $\|T\|_\infty$.
   (b) Montrer que T est bijective.
   (c) Montrer que pour tout $x \in C$, $\|Tx\|_\infty \geq \frac{1}{2}\|x\|_\infty$.
   (d) En déduire que C et $c_0(\mathbb{N})$ sont isomorphes.
   (e) Montrer que $c_0(\mathbb{N})$ est de codimension finie dans C.

Exercice 18 *Théorème de point fixe*

1. Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application. On suppose qu'une des itérées $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ est contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Soit $k \in C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$ avec $\|k\|_\infty = M$. On définit $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ pour tout $u \in C([0,1])$ et $x \in [0,1]$ par
$$(Ku)(x) = \int_0^x k(x,y)u(y)\ dy.$$
   (a) Montrer que K est une application linéaire de $C([0,1])$ dans lui-même.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'application itérée K^n satisfait
$$|K^n u(x)| \leq M^n \|u\|_\infty \frac{x^n}{n!}, \quad \forall u \in C([0,1]), x \in [0,1].$$
   (c) Montrer que pour toute fonction $b \in C([0,1])$, il existe une unique solution $u \in C([0,1])$ à l'équation intégrale
$$u(x) + \int_0^x k(x,y)u(y)\ dy = b(x).$$
   (On pourra considérer l'application $Tu = b - Ku$.)

TD1 : Rappels et compléments d'analyse - Correction

Exercice 1

1. La continuité de l'application linéaire $A : E \to F$ implique l'existence d'une constante $K \geq 0$ telle que pour tout $x \in E$, $\|Ax\|_F \leq K\|x\|_E$. Par conséquent le supremum définissant la quantité $\|A\|_{E\to F}$ est fini. On vérifie les trois points que doit satisfaire une norme :
   — Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, comme $\|\cdot\|_F$ est une norme, par définition
   $$\|(\lambda A)x\|_F = \|\lambda(Ax)\|_F = |\lambda|\|Ax\|_F.$$
   Il reste à diviser par $\|x\|_E$ et passer au supremum si bien que
   $$\|A\|_{E\to F} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{|\lambda|\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|\|A\|_{E\to F}.$$
   — Soit $A, B \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $x \in E$ alors
   $$\|(A+B)x\|_F \leq \|Ax\|_F + \|Bx\|_F.$$
   Comme précédemment, en divisant par $\|x\|_E$ et en passant au supremum, on obtient que $\|A+B\|_{E\to F} \leq \|A\|_{E\to F} + \|B\|_{E\to F}$.
   — Enfin, si $\|A\|_{E\to F} = 0$ alors pour tout $x \neq 0$, $\|Ax\|_F = 0$. Aussi pour tout $x \in E$, $\|Ax\|_F = 0$ si bien que $Ax = 0$ et donc $A = 0$.
2. On remarque d'abord que
   $$\|A\|_{E\to F} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \geq \sup_{x\in E\setminus\{0\}:\|x\|_E\leq 1} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \geq \sup_{x\in E:\|x\|_E=1} \|Ax\|_F.$$
   Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in E \setminus \{0\}$ tel que
   $$\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \geq \|A\|_{E\to F} - \varepsilon, \tag{1}$$
   par définition du supremum. Mais alors $y = x/\|x\|_E$ est unitaire et vérifie $\|Ay\|_F \geq \|A\|_{E\to F} - \varepsilon$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $y \in E$ unitaire vérifiant (1). D'où, $\|A\|_{E\to F} = \sup_{x\in E:\|x\|_E=1} \|Ax\|_F$ et le résultat.
3. Pour tout $x \notin \mathsf{Ker}\ A$, c'est à dire $Ax \in F \setminus \{0\}$, on a
   $$\frac{\|BAx\|_G}{\|x\|_E} = \frac{\|BAx\|_G}{\|Ax\|_F}\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} \leq \|B\|_{F\to G}\|A\|_{E\to F}.$$
   On constate que cette inégalité est en fait vraie pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ et donc en passant au supremum on obtient le résultat voulu.

Exercice 2

On montre les trois propriétés d'une norme. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$ alors

— $N(\lambda f) = |(\lambda f)(0)| + \sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|(\lambda f)(x)-(\lambda f)(y)|}{|x-y|} = |\lambda|N(f)$.
— $N(f+g) = |(f+g)(0)| + \sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|(f+g)(x)-(f+g)(y)|}{|x-y|} \leq N(f) + N(g)$.
— Si $N(f) = 0$, le supremum dans la définition de f implique que f est constante et le premier terme implique que $f(0) = 0$ d'où $f = 0$.

Exercice 3

Le fait que N soit une norme se démontre de manière très simillaire à l'exercice précédent.
Quant à $\tilde{N}$, ce n'est pas une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1])$ car $N(f) = 0$ implique seulement f constante. Par contre, sur le sev fermé C c'est bien une norme du fait des conditions au bord.

Exercice 4

Soit $x, y, z \in E$, alors

— $d(x,y) \geq 0$ et $d(x,y) = 0$ si et seulement si $\|x-y\| = 0$ si et seulement si $x = y$.
— Clairement $d(x,y) = d(y,x)$.
— Enfin, $d(x,y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Exercice 5

On vérifie tout d'abord que d est une métrique sur $\mathbb{R}$. La positivité, la symétrie et l'inégalité triangulaire étant claires, il reste à montrer la non dégénérescence. En fait, si $d(x,y)=0$ alors $\arctan(x)=\arctan(y)$ et puisque arctan est injective, $x=y$.
On a évidemment $\sup_{x,y} d(x,y)=\pi$, ainsi $\mathbb{R}$ muni de d est borné.

Exercice 6

Soient $x,y\in\mathbb{R}^2$,
- $d(x,y)\geq 0$ et si $d(x,y)=0$ alors soit $\|x-y\|=0$ et donc $x=y$; soit $\|x\|+\|y\|=0$ et $x=0=y$.
- La symétrie est une conséquence du fait que la notion d'alignement, ainsi que les expressions définissant d, sont invariant par interversion de x et y.
- Soit z un troisième point de $\mathbb{R}^2$. De deux choses l'une :
  1. les points $0,x$ et y sont alignés
     (a) $0,x$ et z sont alignés et alors $0,y,z$ sont alignés également si bien que
     $$d(x,y)=\|x-y\|\leq\|x-z\|+\|y-z\|=d(x,z)+d(z,y).$$
     (b) $0,x,z$ ne sont pas alignés et alors $0,y,z$ ne le sont pas également si bien que
     $$d(x,y)=\|x-y\|\leq\|x\|+\|y\|+2\|z\|=d(x,z)+d(z,y).$$
  2. Supposons désormais que $0,x$ et y ne sont pas alignés, alors il reste trois cas
     (a) $0,x,z$ sont alignés et $0,z,y$ ne le sont pas ;
     (b) $0,y,z$ sont alignés et $0,z,x$ ne le sont pas ;
     (c) ni $0,x,z$, ni $0,y,z$ ne sont alignés.

     Considérons le cas (a),
     $$d(x,y)=\|x\|+\|y\|\leq\|x-z\|+\|z\|+\|y\|=d(x,z)+d(z,y).$$
     Le cas (b) se traite de la même façon, quant au cas (c), on a
     $$d(x,y)=\|x\|+\|y\|\leq\|x\|+\|z\|+\|z\|+\|y\|=d(x,z)+d(z,y).$$

On remarque sur les figures que la boule unité fermée n'est pas convexe lorsque $\|x\|_2<1$. Dans un espace vectoriel de dimension finie, la boule unité (fermée) est convexe, donc d ne peut-être issue d'une norme.

Exercice 7

- Clairement $d(x,y)\geq 0$ et par définition $d(x,y)=0$ si et seulement si $x=y$.
- d est évidemment symétrique car la relation $x\neq y$ l'est.
- Pour l'inégalité triangulaire, le seul cas non trivial est lorsque $x\neq y$. Dans ce cas si $z\in E$ alors $z\neq x$ ou $z\neq y$ et l'inégalité triangulaire est satisfaite.

Nous avons $B(0,1)=\{x\in E : d(x,y)<1\}=\{0\}$, $\overline{B}(0,1)=\{x\in E : d(x,y)\leq 1\}=\{0,1\}$. Enfin, $\overline{B(0,1)}=\{0\}$ car les singletons sont ouverts et fermés. Ainsi, la fermeture de la boule ouverte est la boule ouverte et non la boule fermée et la boule ouverte est à la fois ouverte et fermée.
Notons que si E est un ensemble arbitraire alors toute partie est ouverte. En effet, soit $A\subset E$ et $x\in A$, alors $B(x,1/2)=\{x\}\subset A$. Ceci a pour conséquence que toute partie de E est fermée. En effet, soit $A\subset E$ alors $A^{\complement}$ est une partie ouverte de E et donc $A=(A^{\complement})^{\complement}$ est fermée.
Notons enfin que pour cette métrique, une suite de point (x_n) converge si et seulement elle est constante/stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 8

Soit A une partie non vide de E. Soient $x,y\in E$, alors pour tout $a\in A$,
$$d(x,A)\leq d(x,a)\leq d(x,y)+d(y,a).$$
Ainsi, $d(x,A)\leq d(x,y)+d(y,A)$. En échangeant le rôle de x et y, on obtient $d(y,A)\leq d(y,x)+d(x,A)=d(x,y)+d(x,A)$.
Finalement, pour tout $x,y\in A$,
$$|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y).$$
Ceci montre que $x\to d(x,A)$ est 1-Lipschitz. En particulier $x\to d(x,A)-d(x,B)$ est continue et donc $\{x\in E : d(x,A)=d(x,B)\}$ est fermé comme l'image inverse de $\{0\}$, qui est fermé pour $|\cdot|$, par une fonction continue.

Exercice 9

1. Comme nous considérons le cas métrique, on peut utiliser la caractérisation séquentielle des ouverts et des fermés. Cependant, ce résultat est valide dans un espace topologique général. Nous donnons ici les deux preuves.
   — Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Puisque $x \in \overline{B}$, il existe $x_n \to x$ avec $x_n \in B$. Comme A est ouvert et $x \in A$, alors $x_n \in A$ pour tout n assez grand. Donc $x_n \in A \cap B$ et sa limite $x \in \overline{A \cap B}$.
   — Soit $x \in A \cap \overline{B}$ et soit V un voisinage de x. Comme A est ouvert, $V \cap A$ est un voisinage de x. Ainsi, $V \cap A \cap B$ est non vide puisque $x \in \overline{B}$. Ceci montre que $x \in \overline{A \cap B}$.
2. Supposons que $\mathsf{Int}\ \overline{U} \cap \mathsf{Int}\ \overline{V} \neq \emptyset$ alors $\overline{U} \cap \mathsf{Int}\ \overline{V} \neq \emptyset$ *a fortiori*. Soit $x \in \overline{U} \cap \mathsf{Int}\ \overline{V}$, alors $\mathsf{Int}\ \overline{V}$ est un ouvert contenant x, c'est un voisinage de x. Par la caractérisation des fermés par les voisinages, il vient que $U \cap \mathsf{Int}\ \overline{V}$ est non vide. Ce raisonnement peut être répéter : nous avons $U \cap \overline{V}$ non vide et donc $U \cap V$ non vide. Contradiction.

Exercice 10

Rappelons que toute réunion d'ouvert est ouverte et que la boule ouverte est ouverte. Ceci montre que c'est une condition suffisante. Réciproquement, si A est ouvert alors pour tout $x \in A$, il existe $r_x > 0$ tel que $x \in B(x, r_x) \subset A$. On peut en fait choisir $r_x = d(x, A^{\complement})/2$, ainsi $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$.

Exercice 11 *Caractérisation séquentielle de la continuité*

Montrons que c'est une condition suffisante. Soit $\varepsilon > 0$ et choisissons $\delta > 0$ tel que $d(x,a) < \delta$ implique $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Par définition de la convergence de (x_n) vers a, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, a) < \delta$ et donc $d'(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. D'où, $\lim_n f(x_n) = f(a)$.
Réciproquement, supposons que f n'est pas continue en a et exhibons une suite (x_n) qui converge vers a mais telle que $(f(x_n))$ ne converge pas vers a. Puisque f n'est pas continue en a, il existe ε_0 et $\delta_0 > 0$ tels que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$ on ait $d'(f(x), f(a)) \geq \varepsilon_0$ pour tout $x \in B(a, \delta)$. Soit $n \geq 1$ et choisissons $x_n \in B(a, \delta_0/(2n))$. Alors clairement (x_n) converge vers a et pourtant $d'(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \geq 1$. Contradiction.

Exercice 12 *Lemme de Cesàro*

1. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ converge, $(x_n - \ell)_{n \geq 0}$ est bornée, disons par $M \geq 0$. De plus pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - \ell| \leq \varepsilon/2$. Ainsi, nous avons pour tout $n \geq N$
$$|y_n - \ell| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[x_k - \ell]\right| \leq \frac{\sum_{k=1}^{N-1}|x_k - \ell|}{n} + \frac{(n-N+1)\varepsilon}{2n} \leq \frac{M(N-1) + (n-N+1)\varepsilon/2}{n}.$$
On choisit $n \geq N$ et tel que $\frac{M(N-1)}{n} \leq \varepsilon/2$ si bien que
$$|y_n - \ell| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$
2. Le raisonnement est très simillaire. En reprenant les mêmes notations, pour tout $n \geq N$
$$|z_n - \ell| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k|x_k - \ell|}{C_n} \leq \frac{MC_{N-1}}{C_n} + \frac{(C_n - C_{N-1})\varepsilon/2}{C_n},$$
où $C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$. On conclut de la même façon.

Exercice 13 *Lemme de Stolz-Cesàro*

1. Par définition : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 : n \geq N$ implique $b_n(\ell - \varepsilon) \leq a_n \leq b_n(\ell + \varepsilon)$. En sommant ces inégalités pour $k = n$ à l'infini, on obtient
$$(\ell - \varepsilon)\sum_{k=n}^{\infty} b_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k \leq (\ell + \varepsilon)\sum_{k=n}^{\infty} b_k,$$
qui se transforme en
$$\ell - \varepsilon \leq \frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{\infty} b_k} \leq \ell + \varepsilon,$$
car $\sum_{k=n}^{\infty} b_k \in]0, \infty[$. Cette inégalité est vraie pour tout $n \geq N$, d'où le résultat.
2. Comme précédemment, nous avons les inégalités suivantes pour tout $n \geq N$.
$$(\ell - 3\varepsilon/2) \leq (\ell - \varepsilon) + \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k}{\sum_{k=N}^{n} b_k} \leq \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k}{\sum_{k=N}^{n} b_k} \leq (\ell + \varepsilon) + \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k}{\sum_{k=N}^{n} b_k}.$$
Or le quotient le plus à droite est plus petit que $\varepsilon/2$ pour tout n suffisamment grand. D'où
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{\sum_{k=N}^{n} b_k} = \ell.$$

Pour obtenir le résultat final, il suffit de remarque que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} b_k}{\sum_{k=N}^{n} b_k} = 1 + \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k}{\sum_{k=N}^{n} b_k} \to 1.$$

Exercice 14 *Lemme de Kronecker*

On note $R_k = \sum_{n \geq k} a_k$ qui est bien défini par hypothèse. On remarque que $a_k = R_k - R_{k+1}$ si bien que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} b_k a_k = \sum_{k=0}^{n} b_k (R_k - R_{k+1}) = b_0 R_0 + \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} R_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} b_k R_{k+1} - b_{n+1} R_{n+2} \\ = b_0 R_0 - b_{n+1} R_{n+2} + \sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) R_{k+1}.\end{aligned}$$

On conclut en utilisant le lemme de Cesàro (question 2, de l'exercice 12) en posant $c_n = b_{n+1} - b_n$.

Exercice 15

On pose $f_n(x) = e^{2i\pi nx}$ pour $x \in [0,1]$. Alors $f_n \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C})$ et $\|f_n\|_\infty = 1$ car $|f_n(x)| = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. De plus si $m \neq n$, alors

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |e^{2i\pi nx} - e^{2im\pi x}| = |1 - e^{2i(m-n)\pi x}| \quad \Longrightarrow \quad \|f_n - f_m\|_\infty = 2.$$

Posons $A = \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{C}) \ : \quad \|f\|_\infty \leq 1\}$. Alors,

— $\forall f, g \in A$, $\|f - g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \leq 2$ si bien que A est borné ;

— de plus, si $(g_n)_{n \geq 0}$ est une suite qui converge uniformément vers g alors $\|g\|_\infty \leq \|g - g_n\|_\infty + \|g_n\|_\infty$ pour tout $n \geq 0$ si bien que $\|g\|_\infty \leq 1$, A est fermé.

Pourtant A n'est pas compact : considérons la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ définie ci-dessus et supposons qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ extraite de $(f_n)_{n \geq 0}$ qui converge, alors $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ est de Cauchy. Contradiction avec $\|f_n - f_m\|_\infty \geq 1$ pour tout $n \neq m$.

Exercice 16

Rappelons que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet (c'est une propriété centrale qui découle de la construction axiomatique des nombres réels).

1. Si $\phi : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|_*)$ est une application linéaire continue bijective et d'inverse continue alors les espaces $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|_*)$ sont simultanément complets ou non complets.

   En effet, supposons par exemple $(E, \|\cdot\|)$ complet et montrons que $(F, \|\cdot\|_*)$ est complet. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans F, alors on vérifie facilement que $(\phi^{-1}(x_n))$ est une suite de Cauchy dans E car $\|\phi^{-1}(x) - \phi^{-1}(y)\| \leq K\|x - y\|$ puisque ϕ^{-1} est linéaire continue. Ainsi, $(\phi^{-1}(x_n))$ converge vers $x^* \in E$ et par continuité de ϕ, on obtient la convergence de (x_n) vers $\phi(x^*)$. La réciproque est immédiate en échangeant les rôles de E et F. Notons plus généralement que deux espaces métriques en bijection via une application bilipschitz seront également simultanément complets ou non complets.

   Si $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $d \geq 0$, alors il existe une application linéaire bijective $\phi : E \to \mathbb{R}^d$. On définit alors l'application $N : \mathbb{R}^d \to [0, \infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par $N(x) = \|\phi^{-1}x\|$. On vérifie que N est une norme :

   — $N(x) = 0$ si et seulement si $\phi^{-1}x = 0$ si et seulement si $x = 0$,

   — $N(\lambda x) = \|\phi^{-1}(\lambda x)\| = \|\lambda \phi^{-1}x\| = |\lambda| N(x)$.

   — $N(x + y) = \|\phi^{-1}(x + y)\| = \|\phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)\| \leq (x) + N(y)$.

   Par conséquent, $(E, \|\cdot\|)$ est complet si et seulement si $(\mathbb{R}^d, N)$ est complet si et seulement si $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est complet car toutes les normes sont équivalentes sur un espace de dimension finie.

   Le cas d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé de dimension finie se traite exactement de la même façon en remplaçant $\mathbb{R}^d$ par $\mathbb{C}^p$ en remarquant que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est complet car isomorphe à $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$.

   Considérons donc $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$. En notant $x_n^{(i)}$ la $i$ème coordonnée de x_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et remarquant que pour tout $i = 1, \ldots, d$ on a $|x_n^{(i)} - x_m^{(i)}| \leq \|x_n - x_m\|_\infty$, il vient que $(x_n^{(i)})$, $i = 1, \ldots, d$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ complet. Par conséquent, $(x_n^{(i)})$ converge vers une limite réelle que l'on notera $x^{(i)}$. Posons $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(d)})$ et fixons $\varepsilon > 0$. Alors, pour tout $i = 1, \ldots, d$, il existe $N_i \geq 0$ tel que $|x_n^{(i)} - x^{(i)}| < \varepsilon$ dès que $n \geq N_i$. En posant $N = \max\{N_i : i = 1, \ldots, d\}$, il vient que si $n \geq N$ alors $\|x_n - x\| < \varepsilon$. Ainsi, $\lim_n \|x_n - x\|_\infty = 0$.

   La notion de complétude dans le cadre des espaces vectoriels normés n'est déterminante qu'en dimension infinie.

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. En particulier, pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f_m(y)| < \varepsilon$. Ainsi, à $x \in [0,1]$ fixé, $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, elle donc convergente : il existe une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [0,1]$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \geq 0$ tel que pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$ et pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Puis en passant à la limite en m, on obtient que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ et tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x) - f(x)| = \limsup_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. C'est à dire $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$. Enfin, la limite uniforme de fonctions continues étant continues, on obtient la convergence de $(f_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.
3. Traitons le cas $p \in [1, \infty)$ et considérons $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\ell^p(\mathbb{N})$ alors
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \forall n, m \geq N, \quad \|x_n - x_m\|_p \leq \varepsilon. \tag{2}$$
Au vu de la définition de $\|\cdot\|_p$, il est clair que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $|x_n^{(i)} - x_m^{(i)}| \leq \varepsilon$. Ceci montre que $(x_n^{(i)})_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ qui est complet donc convergente. Notons $x = (x^{(i)})_{i\geq 0}$ la limite simple de (x_n). Montrons que $x \in \ell^p(\mathbb{N})$. Puisque $(x_n^{(0)})$ converge vers $x^{(0)}$, on peut trouver un entier $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|x_n^{(0)} - x^{(0)}| \leq 1$. De même, on peut trouver $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $|x_n^{(0)} - x^{(0)}| \leq \frac{1}{2}$ et $|x_n^{(1)} - x^{(1)}| \leq \frac{1}{2}$. Continuant ainsi, nous pouvons donc construire une suite $(n_j)_{j\geq 0}$ telle que pour tout $n \geq n_j$ et tout $i = 0, \ldots, j$, $|x_n^{(i)} - x^{(i)}| \leq 2^{-j}$. Ainsi,
$$\left(\sum_{i=0}^{j} |x^{(i)}|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=0}^{j} |x^{(i)} - x_{n_j}^{(i)}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=0}^{j} |x_{n_j}^{(i)}|^p\right)^{1/p}.$$
Le premier terme est donc majoré par $(j+1)^{1/p} 2^{-j}$ alors que le second terme est majoré par $\|x_{n_j}\|_p$. On montre facilement qu'une suite de Cauchy est bornée, si bien que la somme à droite est uniformément bornée en $j \in \mathbb{N}$. Finalement, puisque
$$\sup_{i\geq 0} |x_n^{(i)} - x_m^{(i)}| \leq \|x_n - x_m\|_p, \tag{3}$$
la convergence de (x_n) vers x est en réalité uniforme si bien que
$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |x_m^{(i)} - x_n^{(i)}|^p = \sum_{i=0}^{\infty} |x^{(i)} - x_n^{(i)}|^p,$$
et en injectant cette relation dans (2), on obtient que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad n \geq N, \quad \|x - x_n\|_p \leq \varepsilon.$$
Le cas $p = \infty$ se traite presque de la même manière que pour l'espace des fonctions continues. Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy, on remarque comme précédemment que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(x_n^{(i)})_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. On pose alors $x^{(i)} = \lim_{n\to\infty} x_n^{(i)}$. La propriété de Cauchy implique alors que
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad n, m \geq N, \quad \forall i \geq 0 \quad |x_n^{(i)} - x_m^{(i)}| \leq \varepsilon.$$
Aussi en passant à la limite en $m \to \infty$, on obtient que $x_n - x \in \ell^\infty$ si bien que $x = x_n - (x_n - x) \in \ell^\infty$. On obtient également la convergence de x_n vers x pour $\|\cdot\|_\infty$.
4. Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Ainsi,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 : \quad \forall n, m \geq N, \quad \forall x \in E : \quad \|T_n x - T_m x\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E. \tag{4}$$
Puisque $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach, pour tout $x \in E$, il existe $\ell_x \in F$ telle que $\lim_n \|T_n x - \ell_x\|_F = 0$. L'application $E \ni x \to \ell_x \in F$ est linéaire comme limite d'application linéaire : soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\|\ell_{\lambda x + y} - \lambda \ell_x - \ell_y\|_F \leq \|\ell_{\lambda x+y} - T_n(\lambda x + y)\|_F + \|T_n(\lambda x + y) - \lambda T_n x - T_n y\|_F \\ + |\lambda| \|T_n x - \ell_x\|_F + \|T_n y - \ell_y\|_F \to_{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$
On note T l'application linéaire $x \to \ell_x$. On a évidemment
$$\|Tx\|_F \leq \|Tx - T_n x\|_F + \|T_n x\|_F = \|\ell_x - T_n x\|_F + \|T_n x\|_F.$$
Le premier terme tend vers 0 par définition de ℓ_x alors que le second terme est borné (une suite de Cauchy est toujours bornée !). Ainsi, T est continue. Enfin, à l'aide de (4) et de la deuxième inégalité triangulaire, il vient pour tout $n \geq N$ et $x \in E$ que
$$\|T_n x - Tx\|_F = \lim_{m\to\infty} |\|T_n x - Tx\|_F - \|T_m x - Tx\|_F| \leq \|T_n x - T_m x\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E,$$
ce qui montre que $\|T_n - T\|_{E\to F} \leq \varepsilon$ et la convergence de (T_n) vers T dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

Exercice 17

1. On note tout d'abord qu'une suite réelle convergente est bornée, ainsi $C \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$. Soit $x = (x^{(n)}), y = (y^{(n)}) \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note x^∞ et y^∞ les limites des suites $x = (x^{(n)})$ et $y = (y^{(n)})$. Alors la suite $(\lambda x^{(n)} + y^{(n)})$ converge vers $\lambda x^\infty + y^\infty$. Ceci montre que C est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
   Montrons à présent que C est fermé. Pour cela, considérons $(x_n) \in C^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C convergent vers $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Pour chaque $n, k, \ell \geq 0$, on établit l'inégalité
   $$|x^{(k)} - x^{(\ell)}| \leq |x^{(k)} - x_n^{(k)}| + |x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}| + |x_n^{(\ell)} - x^{(\ell)}| \leq 2\|x - x_n\|_\infty + |x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}|. \quad (5)$$
   Pour chaque $n \geq 0$, la suite réelle $(x_n^{(k)})_{k\geq 0}$ est convergente donc de Cauchy. Fixons $\varepsilon > 0$. Alors, d'une part, il existe $N_1 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $\|x - x_n\|_\infty \leq \varepsilon/3$; d'autre part, il existe $N_2 \geq 0$ tel que $k, \ell \geq N_2$, $|x_n^{(k)} - x_n^{(\ell)}| \leq \varepsilon/3$. Comme l'inégalité (5) est vraie pour tout $n \geq 0$, elle est en particulier vraie pour $n = n_0 \geq N_1$ fixé. Ainsi, pour tout $k, \ell \geq N_2$, $|x^{(k)} - x^{(\ell)}| < \varepsilon$. Ceci montre que la suite réelle $(x^{(k)})_{k\geq 0}$ est de Cauchy, elle converge. Aussi $x \in C$ et C est fermé.
   Tout fermé d'un espace complet est complet, donc C est complet.
2. Pour $x = (x^{(k)})_{k\geq 0}$, $Lx = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} \in \mathbb{R}$. L'application qui à x associe Lx est évidemment linéaire et il est claire que $|Lx| \leq \|x\|_\infty$ si bien que $\|L\| \leq 1$. Pour montrer que $\|L\| = 1$ il suffit de considérer la suite constante égale à 1.
3. On a $C \supset c_0(\mathbb{N}) = L^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un sev fermé par une application linéaire continue donc $c_0(\mathbb{N})$ est fermé dans C. L'espace $c_0(\mathbb{N}) \subset C$ est également fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$ puisque C est fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$.
4. (a) Il ne fait aucun doute que T est linéaire. De plus,
   $$\|Tx\|_\infty \leq \max(y_0, 2\|x\|_\infty) \leq 2\|x\|_\infty,$$
   si bien que T est continue et $\|T\|_\infty \leq 2$. De plus, si $x = (x_n)$ avec $x_0 = 1$ et $x_n = -1$ pour tout $n \geq 1$, alors $(Tx)_k = 0$ pour tout $k \geq 2$, $(Tx)_1 = 2$ et $(Tx)_0 = -1$. Dans tous les cas, $\|x\|_\infty = 1$ et $\|T_x\| = 2$.
   (b) Pour tout $n \geq 1$, $x_{n-1} = y_n + \lim_k x_k = y_n + y_0$. Ainsi, T est bijective avec $x_n = (T^{-1}y)_n = y_{n+1} + y_0$ pour tout $n \geq 0$.
   (c) On pose $y = Tx \in c_0(\mathbb{N})$. Puisque T est bijective, on obtient $x = T^{-1}y$. L'inégalité $\|Tx\|_\infty \geq \frac{1}{2}\|x\|_\infty$ se réécrit $\|T^{-1}y\|_\infty \leq 2\|y\|_\infty$. Autrement dit, cette question consiste à montrer que T^{-1} est continue (en plus d'être linéaire) de norme ≤ 2. Or par la question précédente, il est clair que $\|T^{-1}y\|_\infty \leq \sup_{n\geq 0} |y_{n+1}| + |y_0| \leq 2\|y\|_\infty$.
   (d) L'application $T : C \to c_0(\mathbb{N})$ est linéaire continue, bijective, d'inverse continue. C'est un isomorphisme.
   (e) On remarque que $C \simeq c_0(\mathbb{N}) \oplus \mathsf{span}\, \mathbf{1}$ ce qui montre que $c_0(\mathbb{N})$ est de codimension 1 dans C.

Exercice 18 *Théorème de point fixe*

1. Rappelons qu'une fonction $g : E \to E$ est contratancte si il existe $\rho \in [0, 1)$ tel que $d(g(x), g(y)) \leq \rho d(x, y)$. Posons $g = f^n$.
   — Unicité : On montre que f admet un unique point fixe. Soit a, b deux points fixes de f : $a = f(a)$ et $b = f(b)$. Alors $d(a, b) = d(f^n(a), f^n(b)) \leq \rho d(a, b)$, d'où $d(a, b) = 0$ et $a = b$. Ceci montre aussi que g admet un unique point fixe.
   — Existence : Soit $x_0 \in E$ et définissons par récurrence pour $n \geq 0$, $x_{n+1} = g(x_n)$. Alors, pour tout $p \geq 1$, par l'inégalité triangulaire
   $$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{k=0}^{p-1} \rho^{n+k} \leq d(x_0, x_1) \frac{\rho^n}{1 - \rho}.$$
   Ceci montre que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans (E, d) complet, donc (x_n) converge vers un point $x_\infty \in E$. La propriété de contraction implique en particulier la continuité de g. Ainsi, en passant à la limite $x_\infty = g(x_\infty)$. Mais alors, $f(x_\infty) = f(g(x_\infty)) = f^{n+1}(x_\infty) = g(f(x_\infty))$. Donc $f(x_\infty)$ est également un point fixe de g. Par unicité du point fixe de g, il vient que $x_\infty = f(x_\infty)$, c'est à dire x_∞ est un point fixe de f. Celui-ci étant unique, cela termine la preuve.
   Notons que cela donne une méthode itérative efficace pour estimer le point fixe puisque $d(x_n, x_\infty) \leq d(x_0, x_1)\frac{\rho^n}{1-\rho}$.
2. (a) Soit $u, v \in C([0, 1], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in [0, 1]$
   $$(K(\lambda u + v))(x) = \int_0^x k(x, y)(\lambda u(y) + v(y))\, dy = \lambda(Ku)(x) + (Kv)(x),$$
   donc K est linéaire. Soit $x_0 \in [0, 1]$, montrons que la fonction Ku est continue en x_0. En fait,
   $$|Ku(x) - Ku(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x k(x, y)u(y)\, dy\right| \leq M\|u\|_\infty |x - x_0|,$$
   donc Ku est Lipschitz et donc continue. L'application linéaire K est par ailleurs elle-même continue puisqu'avec une estimation simillaire, on a $\|K\| \leq M$.

(b) On peut procéder par récurrence. Pour $n = 1$,

$$|Ku(x)| \leq \int_0^x |k(x,y)u(y)| \; dy \leq M\|u\|_\infty x,$$

et l'inégalité est satisfaite. Supposons l'inégalité vraie au rang n et montrons la au rang $n+1$. Nous avons

$$|K^{n+1}u(x)| = |K[K^n u](x)| = \left| \int_0^x k(x,y)K^n u(y) \; dy \right| \leq M^{n+1}\|u\|_\infty \int_0^x \frac{y^n}{n!} = M^{n+1}\|u\|_\infty \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(c) En posant $Tu = b - Ku$, le problème revient à trouver un point fixe à l'application $T : C([0,1],\mathbb{R}) \to C([0,1],\mathbb{R})$. L'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ étant complet pour $\|\cdot\|_\infty$, il suffit de montrer que T^n est contractante, or :

$$T^n u = b - KT^{n-1}u = b - Kb + K^2T^{n-2}u = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j K^j b + (-1)^n K^n u.$$

Par conséquent, pour u, v des fonctions continues sur $[0,1]$,

$$|T^n u(x) - T^n v(x)| = |K^n(u-v)(x)| \leq M^n\|u-v\|_\infty \frac{x^n}{n!} \quad \Longrightarrow \quad \|T^n u - T^n v\|_\infty \leq \frac{M^n}{n!}\|u-v\|_\infty.$$

Donc pour n assez grand, T^n est contractante. Le théorème du point fixe donne l'existence d'une solution u à l'équation intégrale. Notons que la solution est continue !

TD2 : Tribus, applications mesurables, mesures

Exercice 1

Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que
$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i), \quad A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i).$$
2. Montrer que
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\complement}, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}.$$
3. Soient F un ensemble, $f : E \to F$ une application. Montrer que
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$
Montrer que l'inclusion est stricte en générale. Montrer que si f est injective, la deuxième inclusion est une égalité. Montrer que $f(A)^{\complement}$ et $f(A^{\complement})$ ne sont en général pas comparables.
4. Soient $C \in \mathcal{P}(F)$ et $(C_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(F)$. Montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(C_i), \quad f^{-1}(C^{\complement}) = f^{-1}(C)^{\complement}.$$

Exercice 2 *Réunion et intersection dénombrables*

1. Déterminer les ensembles suivants :
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0, 1-\frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0, \frac{1}{n}\right[, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[, \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[k-\frac{1}{n+1}, k+\frac{1}{n}\right[.$$
2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$. Interpréter l'ensemble suivant :
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i\geq k}\left\{x\in E, |f_i(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

Exercice 3 *Ensemble de convergence*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble
$$A = \{x \in \mathbb{X} : (f_n(x))_{n\geq 0} \text{ est convergente}\}$$
est un élément de $\mathcal{X}$. *(On pourra utiliser la complétude de $\mathbb{C}$.)*

Exercice 4 *Points de discontinuité d'une fonction croissante*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que f admet des limites à gauche $\lim_{y\to x^-} f(y)$ et à droite $\lim_{y\to x^+} f(y)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

(On pourra considérer, pour $n \geq 1$, les ensembles $A_n = \left\{x \in [-n, n] : \lim_{y\to x^+} f(y) - \lim_{y\to x^-} f(y) \geq \frac{1}{n}\right\}$.)

Exercice 5

Donner un exemple de suite décroissantes d'ensembles $(A_n)_{n\geq 0}$ tel que pour tout $n \geq 0$, A_n est de cardinal infini et $\cap_{n\geq 0} A_n = \emptyset$.

Exercice 6 *Fonction indicatrice*

Soient E un ensemble, A, B des parties de E et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de partie de E.

1. Déterminer $\mathbf{1}_\emptyset$, $\mathbf{1}_E$ et calculer $\mathbf{1}_A^{-1}(J)$ pour tout $J \subset \mathbb{R}$.
2. Montrer que
   (a) $A \subset B$ si et et seulement si $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$ et $A = B$ si et seulement si $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$;
   (b) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A^\complement} = 1 - \mathbf{1}_A$;
   (c) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$;
   (d) $\mathbf{1}_{A\Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|$.
3. Montrer que $\mathbf{1}_{\cup_{i\in I} A_i} = \sup_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}$ et $\mathbf{1}_{\cap_{i\in I} A_i} = \inf_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}$.

Exercice 7 *Exemple de tribus*

Si $A \subset \mathbb{R}$, on note $-A$ l'ensemble $\{-a : a \in A\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la tribu image réciproque est $\mathcal{A}$.
3. Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ et les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Exercice 8 *Tribu induite*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable et $B \subset \mathbb{X}$. Montrer que la tribu induite $\mathcal{X}_B = \{B \cap A : A \in \mathcal{X}\}$ est une tribu sur B rendant l'injection canonique mesurable.

Exercice 9 *Tribu produit engendrée*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ deux espaces mesurables. On suppose que $\mathcal{X}$ (*resp.* $\mathcal{Y}$) est engendrée par $\mathcal{E}$ (*resp.* $\mathcal{F}$). On suppose de plus que $\mathbb{X} \in \mathcal{E}$ et $\mathbb{Y} \in \mathcal{F}$. Montrer que la tribu produit $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ sur $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ est engendrée par les ensembles qui s'écrivent $A \times B$ avec $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 10

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable et f, g des applications mesurables de $\mathbb{X}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ muni de la tribu borélienne. On souhaite montrer que les ensembles suivants sont des éléments de $\mathcal{X}$:

$$A = \{x \in \mathbb{X} : f(x) < g(x)\}, \quad B = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \leq g(x)\}, \quad C = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = g(x)\}.$$

1. Montrer que A s'écrit encore $A = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{X} : f(x) < q < g(x)\}$. En déduire que $A \in \mathcal{X}$.
2. En déduire que $B, C \in \mathcal{X}$.

Exercice 11 *Algèbre des fonctions étagées*

Montrer que l'ensemble des fonctions étagées d'un espace mesurable $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ est une algèbre.

Exercice 12 *Fonctions continues par morceaux*

Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux est mesurable.

Exercice 13

Soit μ une mesure de probabilité sur un espace mesurable $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$. Montrer que $\mathcal{Y} = \{A \in \mathcal{X} : \mu(A)(1 - \mu(A)) = 0\}$ est une tribu sur $\mathbb{X}$.

Exercice 14 *Définition équivalente d'une mesure*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable. Montrer qu'une application $\mu : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. pour tout $A, B \in \mathcal{X}$ disjoints, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
3. pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$: $\mu(\cup_{n\geq 0} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Exercice 15 *Mesure de comptage*

Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et μ une application définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ par

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathsf{card}\ A & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X}), \mu)$ est un espace mesuré. La mesure μ est appelée mesure de comptage sur $\mathbb{X}$.

Exercice 16 *Combinaison linéaire de mesures*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable, $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels positifs et $(\mu_k)_{k\geq 0}$ une suite de mesures positives sur $\mathcal{X}$.

1. Montrer que $\nu = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \mu_k$ est une mesure positive sur $\mathcal{X}$.
2. Si on suppose de plus que, pour tout $k \geq 0$, μ_k est une mesure de probabilité, à quelle condition a-t-on que ν est une probabilité ? Donner une interprétation géométrique de ce résultat (notamment dans le cas où la somme est finie).

Exercice 17 *Supremum et infimum de mesures*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable et $(\mu_k)_{k\geq 0}$ une suite de mesures sur $\mathcal{X}$. On suppose que, pour tout $A \in \mathcal{X}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\mu_k(A) \leq \mu_{k+1}(A)$.

1. Pour tout $A \in \mathcal{X}$, on pose $\mu(A) = \sup_{k\geq 0} \mu_k(A)$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{X}$.
2. On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}$, on définit

$$\nu_j(A) = \begin{cases} \mathsf{card}\ (A \cap [j, \infty)) & \text{si } A \cap [j, \infty) \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer, pour tout $j \in \mathbb{N}$, que ν_j est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$. On pose $\nu(A) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \nu_j(A)$ pour tout $A \subset \mathbb{N}$. Calculer $\nu(\mathbb{N})$ et $\nu(\{k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que ν n'est pas une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 18 *Mesure géométrique*

Soit $\rho \in (0, 1)$. Montrer que l'application $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\mu(A) = \sum_{i\in A\cap\mathbb{N}^*} \rho(1-\rho)^{i-1}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ appelée mesure géométrique de paramètre ρ. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mu(\{1, \ldots, n\})$ et $\mu(\{n, n+1, \ldots\})$. Quels sont les ensembles de mesures nulle ?

Exercice 19 *Mesure de Lebesgue*

Soit B une partie de $\mathbb{R}$ et a un réel. On note $a + B$ l'ensemble $a + B = \{a + b : b \in B\}$. Soit μ une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu([0, 1]) = 1$ et, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(a + B) = \mu(B)$. On dit que μ est invariante par translation.

1. Soit $\alpha = \mu(\{0\})$. Montrer que $n\alpha = \mu(\{1/k : 1 \leq k \leq n\}) \leq 1$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$.
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu((0, 1/n]) = 1/n$, puis que pour tout $k_1 \leq k_2$ des entiers naturels,

$$\mu\left(\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right]\right) = \frac{k_2 - k_1}{n}.$$

   En déduire que pour tout rationnel $q < r$, $\mu((q, r]) = r - q$, puis que pour tout réels $a < b$, $\mu((a, b)) = b - a$.
3. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, que vaut $\mu(I)$? Que peut-on conclure de ces calculs ?

TD2 : Tribus, applications mesurables, mesures

Exercice 1

1. Les deux égalités se montrent de façon très simillaire, on considère seulement la première. Soit $x \in A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$, alors $x \in A$ et il existe $i \in I$ tel que $x \in B_i$, ainsi $x \in A \cap B_i$ et donc $x \in \bigcup_{i\in I} A \cap B_i$. Réciproquement, si $x \in \bigcup_{i\in I} A \cap B_i$ alors il existe $i \in I$ tel que $x \in A \cap B_i$ et donc $x \in A$ et $x \in B_i$. Il vient alors que $x \in \bigcup_{i\in I} B_i$ si bien que $x \in A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)$. D'où le résultat.
2. Ici encore, on ne s'intéresse qu'à la première égalité. Nous avons par définition que $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ signifie qu'il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$. Le contraire logique de cette assertion est que pour tout $i \in I$, $x \notin A_i$ c'est à dire $x \in \bigcap_{i\in I} A^{\complement}$.
3. Soit $x \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, alors il existe $i \in I$ et $y \in A_i$ tel que $x = f(y)$. Autrement dit, $x \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. Réciproquement, soit $x \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$, alors il existe $i \in I$ et $y \in A_i$ tel que $x = f(y)$. En particulier, $y \in \bigcup_{i\in I} A_i$ et donc $x \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.
   Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$. En effet, si $x \in f(A)$ alors il existe $y \in A$ tel que $x = f(y)$. Mais comme $y \in B$, on déduit que $x \in f(B)$. L'inclusion de la question se déduit de cette propriété en remarquant que $\bigcap_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.
   Il suffit de considérer $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ la fonction nulle. Alors $f(\{0\} \cap \{1\}) = f(\emptyset) = \emptyset$ est strictement contenu dans $f(\{0\}) \cap f(\{1\}) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\} \neq \emptyset$.
   Supposons f injective et considérons $x \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Alors pour tout $i \in I$, il existe $y_i \in A_i$ tel que $x = f(y_i)$. Par injectivité de f, les y_i sont tous égaux, notons y cet élément commun. Par définition, $y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ et $x = f(y)$, d'où $x \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.
   Il suffit de considérer la fonction nulle comme précédemment alors $f(\{0\}^{\complement}) = \{0\}$ et $f(\{0\})^{\complement} = \{1\}$. Ces deux ensembles ne sont pas comparable.
4. Soit $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$, alors $f(x) \in \bigcup_{i\in I} C_i$ et il existe $i \in I$ tel que $f(x) \in C_i$. Autrement dit, $x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i)$. Réciproquement, si il existe $i \in I$ tel que $f(x) \in C_i$ alors en particulier $f(x) \in \bigcup_{i\in I} C_i$ et donc $x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i_i n I} C_i\right)$.
   La deuxième égalité découle de la première et de la troisième par passage au complément. Considérons donc la troisième égalité. D'une part, $f^{-1}(C^{\complement}) = \{x \in E : f(x) \in C^{\complement}\}$, d'autre part $f^{-1}(C)^{\complement} = \{x \in E : f(x) \in C\}^{\complement}$. Mais comme $f(x) \in C \cup C^{\complement}$, nous obtenons l'égalité de ces deux ensembles.

La moralité de l'exercice est que tout se passe mieux pour les images réciproques.

Exercice 2 *Réunion et intersection dénombrables*

1. — $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0,1[$,
   — $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$,
   — $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[=]0,2[$,
   — $\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[k - \frac{1}{n+1}, k + \frac{1}{n}\right[= \mathbb{N}^*$.
2. En français, c'est l'ensemble des $x \in E$ tel que pour tout $n \geq 1$, il existe $k \geq 1$ tel que pour tout $i \geq k$, $|f_i(x) - f(x)| < 1/n$. C'est en fait l'ensemble des $x \in E$ tels que $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.

Exercice 3 *Ensemble de convergence*

La suite complexe $(f_n(x))$ converge si et seulement si elle est de Cauchy puisque $\mathbb{C}$ est complet. Aussi, on peut écrire

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m\geq N} \bigcap_{p\geq 1} \{x \in E : |f_m(x) - f_{m+p}(x)| < 1/n\}.$$

Par mesurabilité des fonctions (f_n), l'ensemble $\{x \in E : |f_m(x) - f_{m+p}(x)| < 1/n\}$ est mesurable. Donc A est mesurable.

Exercice 4 *Points de discontinuité d'une fonction croissante*

1. Puisque f est croissante, les quantités $g = \sup_{y<x} f(y)$ et $d = \inf_{y>x} f(y)$ sont bien définies. On vérifie facilement qu'il s'agit des limites à gauche et à droite de f.
2. Puisque f est croissante, $f([-n,n]) \subset [f(-n), f(n)]$ et donc, toujours en utilisant la croissance de f, $\mathsf{card}\, A_n \leq n(f(n) - f(-n))$. L'ensemble des points de discontinuité de f est alors $\cup_{n\geq 1} A_n$, c'est une réunion dénombrable d'ensemble finis, c'est dénombrable.

Exercice 5

Considérer $A_n =]-n, n[^\complement \subset \mathbb{R}$. La suite (A_n) est décroissante, pour tout $n \geq 0$, A_n est infini et

$$\bigcap_{n\geq 0} A_n = \left(\bigcup_{n\geq 0}]-n, n[\right)^\complement = \mathbb{R}^\complement = \emptyset$$

Exercice 6 *Fonction indicatrice*

1. Clairement, $\mathbf{1}_\emptyset = 0$, $\mathbf{1}_E = 1$ et
$$\mathbf{1}_A^{-1}(J) = \begin{cases} E & \text{si} \quad 0, 1 \in J, \\ A^\complement & \text{si} \quad 0 \in J \quad \text{et} \quad 1 \in J^\complement \\ A & \text{si} \quad 0 \in J^\complement \quad \text{et} \quad 1 \in J \\ \emptyset & \text{si} \quad 0, 1 \in J^\complement \end{cases}$$
2. Montrer que
   (a) Si $x \notin A$, $\mathbf{1}_A(x) = 0$ donc l'inégalité est triviale. Si $x \in A$ alors $x \in B$ et donc $1 = \mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x)$ et l'inégalité est encore vérifiée. Réciproquement, si $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$ alors $x \in B^\complement$ implique $x \in A^\complement$ c'est à dire $A \subset B$. La seconde partie de la question est une conséquence triviale de ce résultat.
   (b) $\mathbf{1}_{A\cap B}(x) = 1$ si et seulement si $x \in A \cap B$ si et seulemet si $x \in A$ et $x \in B$ si et seulement si $\mathbf{1}_A(x) = 1 = \mathbf{1}_B(x)$ si et seulement si $\mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x) = 1$.
   De même $\mathbf{1}_{A^\complement}(x) = 1$ si et seuleument si $x \in A^\complement$ si et seulement si $\mathbf{1}_A(x) = 0$.
   (c) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$;
   (d) $\mathbf{1}_{A\Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|$.
3. Montrer que $\mathbf{1}_{\cup_{i\in I} A_i} = \sup_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}$ et $\mathbf{1}_{\cap_{i\in I} A_i} = \inf_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}$.

Exercice 7 *Exemple de tribus*

1. Il est tautologique que $\emptyset \in \mathcal{A}$. Soit $A \in \mathcal{A}$, alors $-(A^\complement) = (-A)^\complement = A^\complement$ d'où $A^\complement \in \mathcal{A}$. Enfin, soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une famille dénombrable d'ensembles de $\mathcal{A}$, alors $- \cup_{n\geq 0} A_n = \cup_{n\geq 0}(-A_n) = \cup_{n\geq 0} A_n$ si bien que $\cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{A}$.
2. Notons $\mathcal{B} = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$. Soit $B \in \mathcal{B}$, alors $f^{-1}(B) = B \cup (-B) = -(B \cup -B) \in \mathcal{A}$. Réciproquement, si $A \in \mathcal{A}$, posons $A' = \{x^2 : x \in A\}$, alors $f^{-1}(A') = (A \cup -A) = A$.
3. Si $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$, (*resp.* dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$) est mesurable, cela signifie que pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (*resp.* $\mathcal{A}$) $f^{-1}(B) = -f^{-1}(B)$.
   Considérons le premier cas. Si f est paire alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. Ainsi,
   $$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : f(y) \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : f(-x) \in B\} = -f^{-1}(B).$$
   Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}$, alors il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x \in f^{-1}(\{y\})$. Par hypothèse, cette image inverse est symétrique, si bien que $-x \in f^{-1}(\{y\})$. Nous avons $f(x) = y = f(-x)$.
   Pour le second cas, il est peut être utile de noter que la condition $\forall B \in \mathcal{A}, f^{-1}(A) = -f^{-1}(A)$ est moins restrictive puisque $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Autrement dit, les fonctions paires sont encore mesurable. Notons également qu'elle est strictement plus grosse : la fonction identité est clairement mesurable de $\mathcal{A}$ dans lui-même mais est impaire. En fait, on va montrer que les fonctions mesurables dans le second cas est exactement l'ensemble des fonctions paires ou impaires.
   Si f est paire, nous l'avons déjà montré. Si f est impaire, considérons $B \in \mathcal{A}$. Alors $B = \cup_{y\in B: y\geq 0}\{y, -y\}$ et $f^{-1}(B) = \cup_{y\in B:y\geq 0} f^{-1}(\{y\}) \cup f^{-1}(\{-y\})$. Si $x \in f^{-1}(B)$, alors il existe $y \in B$ tel que $f(x) = y$ ou $f(x) = -y$. Dans tous les cas, $f(-x) = -f(x) = \pm y$ si bien $-x \in f^{-1}(B)$. Ceci implique $f^{-1}(B) = -f^{-1}(B)$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}(B)$ alors il existe $y \in B$ tel que $f(x) \in \{y, -y\}$. Or $\{y, -y\} \in \mathcal{A}$ et son image inverse contient x, il cotient donc $-x$ par hypothèse. Finalement, $f(\pm x) \in \{\pm y\}$ et f est paire ou impaire.

Exercice 8 *Tribu induite*

Remarquons qu'on ne suppose pas $B \in \mathcal{A}$. Vérifions les trois axiomes d'une tribu sur B :

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$, or $\emptyset \cap B = \emptyset$ donc $\emptyset \in \mathcal{A}_B$;
2. Soit $A \in \mathcal{A}_B$, alors il existe $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ tel que $A = B \cap \tilde{A}$. Or $A^\complement = B \setminus A = B \setminus (B \cap \tilde{A}) = B \cap \tilde{A}^\complement$.
3. Soit (A_n) une famille dénombrables d'éléments de $\mathcal{A}_B$, alors il existe $\tilde{A}_n \in \mathcal{A}$ tel que $A_n = B \cap \tilde{A}_n$ pour tout n. Alors l'égalité $\cup_n A_n = B \cap \cup_n \tilde{A}_n$ permet de conclure.

Si $B \in \mathcal{A}$, alors $B \cap A \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \cap A \subset B$, d'où le résultat.

Exercice 9 *Tribu produit engendrée*

Posons $\mathcal{S} = \{A \times B, A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{F}\}$. Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, il vient immédiatement que $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$. Réciproquement, notons $p_X : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ la projection canonique, alors comme $\mathbb{Y} \in \mathcal{F}$, il vient que $\{A \times \mathbb{Y}, A \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{S}$ et donc $\sigma(A \times \mathbb{Y}, A \in \mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{S})$. D'autre part,

$$\sigma(A \times \mathbb{Y}, A \in \mathcal{E}) = \sigma(p_X^{-1}(\mathcal{E})) = p_X^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \{A \times \mathbb{Y}, A \in \mathcal{X}\}.$$

Ainsi, $\{A \times \mathbb{Y}, A \in \mathcal{X}\} \subset \sigma(\mathcal{S})$. De même, nous avons $\{\mathbb{X} \times B, B \in \mathcal{Y}\} \subset \sigma(\mathcal{S})$. Finalement, si $(A, B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, en remarquant que $A \times B = A \times \mathbb{Y} \cap \mathbb{X} \times B$, il vient que $A \times B \in \sigma(\mathcal{S})$ comme l'intersection de deux ensembles $\sigma(\mathcal{S})$ mesurables.

Exercice 10

1. Il est clair que A contient la réunion. Montrons l'inclusion inverse et considérons $x \in A$. Alors, puisque l'intervalle $]f(x), g(x)[$ est ouvert et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il intersecte tous les ouverts. Ainsi, il existe $r \in \mathbb{Q} \cap]f(x), g(x)[$. L'ensemble A est une réunion dénombrable d'ensembles mesurables — chaque ensemble à l'interieur de la réunion est l'intersection de deux images inverses par des fonctions boréliennes d'intervalles semi-infinis.
2. On note $\tilde{A}$ l'ensemble A où l'on a intervertit le rôle de f et g. Il est clair que $\tilde{A}$ est mesurable. Or, $B = (\tilde{A})^{\complement}$ et $C = B \setminus A$. Ils sont mesurables.

Exercice 11 *Algèbre des fonctions étagées*

Une fonction étagée est une application mesurable prenant un nombre fini de valeurs distinctes. Il est alors clair que si f, g sont étagées, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f + g$ est encore étagée, de même que (fg) est étagée.

Exercice 12 *Fonctions continues par morceaux*

Notons D l'ensemble des points de discontinuités de f et pour $t \in \mathbb{R}$, $A_t = \{x \in [a, b] : f(x) < t\}$. En écrivant,

$$A_t = (A_t \cap D) \cup (A_t \cap D^{\complement}),$$

il vient que le premier ensemble est fini donc fermé donc borélien alors que nous allons montré que le second est ouvert donc également un borélien. Ceci permettra de conclure. Soit donc $x \in A_t \cap D^{\complement}$ et alors f est continue en $x \in A_t$. On peut donc trouver $\delta > 0$ tel que $|y - x| < \delta$ implique $f(y) < \frac{t+f(x)}{2} < t$. Notant $r = d(x, D)/2 > 0$, nous avons que $B(x, r) \cap B(x, \delta) = B(x, \min(e, \delta))$ est une boule contenu dans $A \cap D^{\complement}$, $A_t \cap D^{\complement}$ est ouvert.

Exercice 13

Il est immédiat que $\mu(\emptyset)(1 - \mu(\emptyset)) = 0$ par définition d'une mesure. Soit $A \in \mathcal{Y}$ alors comme μ est une probabilité

$$\mu(A^{\complement})(1 - \mu(A^{\complement})) = (1 - \mu(A))\mu(A) = 0,$$

et $A^{\complement} \in \mathcal{Y}$. Enfin, soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une famille dénombrables d'ensembles de $\mathcal{Y}$ et notons $B_n = \cup_{k=0}^n A_k$. Alors $B_n \in \mathcal{X}$ pour tout $n \geq 0$ et $(B_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante, aussi $\mu(\cup_{n \geq 0} B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \subset B_n$ et donc

$$\mu(A_k) \leq \sup_{0 \leq k \leq n} \mu(A_k) \leq \mu(B_n) \leq \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k).$$

Comme par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mu(A_k) \in \{0, 1\}$, le sup à gauche vaut 0 ou 1 : dans le premier cas, tous les A_k sont de probablité nulle et la somme à droite est nulle pour tout $n \geq 0$; dans le second cas, $\mu(B_n) = 1$ pour tout n assez grand, et donc $\lim_n \mu(B_n) = 1$.

Exercice 14 *Définition équivalente d'une mesure*

Soit μ une mesure. Les deux premiers points sont trivialement vérifiés. Soit donc (A_n) une suite croissante d'ensembles mesurables et posons $B_0 = A_0$ et pour tout $n \geq 1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Alors, par définition, les B_n sont mesurables et, par croissance de (A_n), deux à deux disjoints. De plus, pour tout $n \geq 0$, $A_n = \cup_{k=0}^n B_k$. Donc

$$\mu(\cup A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(\cup_{k=0}^n B_k) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Réciproquement, supposons que les trois points soit satisfait. Le premier axiome d'une mesure est trivialement satisfait. Soit (A_n) une famille d'ensemble mesurables deux à deux disjoints et posons $B_n = \cup_{k=0}^n A_k$. Alors (B_n) est une suite croissante d'ensemble mesurable. D'autre part, une récurrence immédiate sur le deuxième point donne l'additivité finie de μ. Finalement,

$$\mu(\cup A_n) = \mu(\cup B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(\cup_{k=0}^n A_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k) = \sum_{n \geq 0} \mu(A_n).$$

Remarquons au passage que le troisième point n'est rien d'autre qu'une version du théorème de convergence monotone appliqué à la suite de fonctions $(\mathbf{1}_{A_n})$.

Exercice 15 *Mesure de comptage*

Nous avons trivialement que $\mu(\emptyset) = 0$. Soit (A_n) une suite d'ensemble mesurables deux à deux disjoints. Alors de deux choses l'une : soit tout les A_n sont finis et $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$; soit au moins un des A_n est infini si bien que $\cup A_n$ est infini, il vient encore $\mu(\cup A_n) = \sum \mu(A_n)$.

Exercice 16 *Combinaison linéaire de mesures*

1. On calcule $\nu(\emptyset) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \mu_k(\emptyset) = 0$. Soit (A_n) une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints. Alors,

$$\nu(\cup A_n) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \mu_k(\cup A_n) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \sum_{n\geq 0} \mu_k(A_n) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \alpha_k \mu_k(A_n) = \sum_{n\geq 0} \nu(A_n).$$

2. On calcule

$$1 = \nu(\mathbb{X}) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \mu_k(\mathbb{X}) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k.$$

   La mesure de probabilité ν est alors une combinaison convexe des μ_k. Géométriquement, l'ensemble des mesures de probabilité sur $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ est un convexe : si μ_1 et μ_2 sont des probabilités, alors pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ est une probabilité.

Exercice 17 *Supremum et infimum de mesures*

1. On va utiliser la deuxième caractérisation des mesures. On calcule $\mu(\emptyset) = \sup_{k\geq 0} \mu_k(\emptyset) = 0$. Soit A et B deux ensemnles mesurables disjoints, alors

$$\mu(A\cup B) = \sup_{k\geq 0} \mu_k(A) + \mu_k(B) = \lim_n \sup_{0\leq k\leq n} \mu_k(A) + \mu_k(B) = \lim_n \mu_n(A) + \mu_n(B) = \mu(A) + \mu(B).$$

   Soit (A_n) une suite croissante d'ensembles mesurables, alors en utilisant le fait $\mu_k(\cdot) \leq \mu_{k+1}(\cdot)$

$$\mu(\cup A_n) = \sup_k \lim_n \mu_k(\cup A_n) = \sup_k \sup_n \mu_k(A_n) = \sup_n \sup_k \mu_k(A) = \sup_n \mu(A_n).$$

   Soit $A \subset B$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mu_k(A) \leq \mu_k(B)$, donc $\mu_k(A) \leq \mu(B)$, donc $\mu(A) \leq \mu(B)$. Cela termine la preuve du troisième axiome.

2. C'est la même preuve que pour la mesure de comptage. Comme $A\cap[j,\infty) \supset [j+1,\infty)$, on obtient $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$. Il est clair que $[j,\infty)\cap\mathbb{N}$ est infini pour tout j donc $\nu(\mathbb{N}) = \infty$. Par contre $\{k\}\cap[j,\infty) = \emptyset$ dès $j > k$, donc $\nu(\{k\}) = 0$. C'est une contradiction car $\mathbb{N} = \cup_{k\geq 0}\{k\}$ qui est une réunion disjointe et pourtant $\infty = \nu(\mathbb{N}) \neq \sum \nu(\{k\}) = 0$.

Exercice 18 *Mesure géométrique*

Nous avons $\nu(\mathbb{R}) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \rho(1-\rho)^{n-1} = 1$. De plus, si (A_n) est une famille d'ensemble deux à deux disjoints alors

$$\nu(\cup A_n) = \sum_{i \cup A_n \cap \mathbb{N}^*} \rho(1-\rho)^{i-1} = \sum_{i\in\cup(A_n\cap\mathbb{N}^*)} \rho(1-\rho)^{i-1} = \sum_{n\geq 0} \nu(A_n),$$

car les $A_n \cap \mathbb{N}^*$ sont deux à deux disjoints.

Exercice 19 *Mesure de Lebesgue*

1. Notons, si ce n'était pas évident, que $\{0\}$ est un fermé (pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$), c'est donc le complémentaire d'un ouvert, c'est un borélien. Nous avons, par additivité et invariance par translation,

$$\mu(\{1/k : 1 \leq k \leq n\}) = \mu(\cup_{k=1}^n \{1/k\}) = \sum_{k=1}^n \mu(\{1/k\}) = n\mu(\{0\}) = n\alpha.$$

   D'autre part, $\{1/k : 1 \leq k \leq n\} \subset [0,1]$, par croissance d'une mesure, on obtient $n\alpha \leq 1$. Cette inégalité ne peut être vraie pour tout $n \geq 1$ que si $\alpha = 0$. Encore par invariance par translation $\mu(\{x\})$.

2. On décompose et on utilise l'invariance par translation :

$$1 = \mu([0,1]) = \mu(\{0\}) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) = n\mu((0,1/n]).$$

De même

$$\mu\left(\left(\frac{k_1}{n},\frac{k_2}{n}\right]\right)=\sum_{\ell=k_1+1}^{k_2}\mu\left(\left(\frac{\ell-1}{n},\frac{\ell}{n}\right]\right)=\frac{k_2-k_1}{n}.$$

Si $q<r$ sont deux rationnels, on peut trouver $n\in\mathbb{N}^*$, ainsi que $p,p'\in\mathbb{Z}$ tels que $q=\frac{p}{n}$ et $r=\frac{p'}{n}$, d'où le résultat. Enfin, si $a<b$ sont des réels, on peut trouver deux suites de rationnels (q_n) et (r_n), la première décroissante, la seconde croissante, telles que $\lim q_n=a$ et $\lim r_n=b$. Alors, en posant $A_n=(q_n,r_n]$, on vérifie facilement que $(a,b)=\cup A_n$ et que la suite (A_n) est croissate. D'où

$$\mu((a,b))=\mu(\cup A_n)=\lim\mu(A_n)=\lim r_n-q_n=b-a.$$

3. Si I est un intervalle borné, alors (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ ou $[a,b]$. Dans tous les cas, $\mu(I)=b-a$. Si il est non borné, disons du type $(-\infty,a]$, il suffit de remarquer que $I=\cup_n(-n,a]$ et $\mu(I)=\infty$ comme mesure d'une union croissante. Le cas $I=[b,\infty)$ est simillaire, de même si on ouvre en la borne finie. Finalement, $\mu(I)$ n'est rien d'autre que sa longueur.

TD3 : Intégrale

Exercice 1 *Quelques calculs d'intégrales contre des mesures discrètes*

Calculer $\int x \ \mu(dx)$ et $\int x^2 \ \mu(dx)$ pour les mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ suivantes :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \mu_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \quad p \in (0,1), \quad \mu_3 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k.$$

Que dire si l'on considère ces mesures comme des mesures sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

Exercice 2 *Entropie*

Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ On définit l'entropie relative de ν par rapport à μ par

$$H(\nu|\mu) = \begin{cases} \int f \log f \ d\mu & \text{si } \nu \text{ est à densité } f \text{ par rapport à } \mu, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soient μ et ν deux mesures de Poisson sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de paramètres respectifs 1 et α. Montrer que ν admet pour densité par rapport à μ la fonction $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_\alpha(k) = e^{1-\alpha} \alpha^k.$$

   Calculer $H(\nu|\mu)$. En déduire que $H(\mu|\nu)$ est positif et ne s'annule que si $\alpha = 1$.
2. Avec les notations de l'exercice 1, calculer $H(\mu_1|\mu_2)$, $H(\mu_1|\mu_3)$ et $H(\mu_3|\mu_1)$.

Exercice 3

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $f_n = \min(f, n)$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, f_n est mesurable et déterminer $\lim_{n\to\infty} \int f_n \ d\mu$.

Exercice 4 *Mesure image*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ un espace mesurable et $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une application mesurable. Pour tout $B \in \mathcal{Y}$, on pose $\nu(B) = \mu(\phi^{-1}(B)) = \phi_*\mu(B)$.

1. Montrer que ν est une mesure.
2. Application : $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Y} = \mathbb{N}$, μ est la mesure de Lebesgue et ϕ la fonction partie entière. Déterminer ν.
3. Soit $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que f est ν-intégrable si et seulement si $f \circ \phi$ est μ-intégrable et dans ce cas $\int f \ d\nu = \int f \circ \phi \ d\mu$. *(On adoptera un raisonnement en trois étapes : on montre l'égalité pour les fonctions étagées positives, puis pour les fonctions mesurables positives puis pour les fonctions intégrables.)*

Exercice 5 *Convergence monotone décroissante*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives.

1. On suppose que $\int f_0 \ d\mu < \infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \ d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \ d\mu.$$

2. Montrer que ce résultat n'est en général pas exact si on ne suppose pas $\int f_0 \ d\mu < \infty$.
3. Quel résultat retrouve-t-on si l'on choisit $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$, $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ décroissante ?

Exercice 6

Calculer les quantités suivantes :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^m} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}}.$$

Exercice 7 *Intervertion de limite et d'intégrale*

Soit μ la mesure définie par $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \delta_k$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$, pour $n \geq 1$, par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(x).$$

1. Pour tout $x \geq 0$, déterminer la limite de la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$.
2. On note g_n, $n \geq 0$, la fonction définie sur $[0, n)$ par $g_n(x) = \log f_{n+1}(x) - \log f_n(x)$. Montrer que g_n, $n \geq 0$, est positive. En déduire que $\{f_n\}_{n\geq 0}$ est une suite croissante.
3. Montrer que la suite $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n\geq 0}$ converge vers une limite à déterminer.

Exercice 8 *Un critère d'intégrabilité en mesure infinie*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}) < \infty.$$

Soient $\alpha > 0$ et $f_\alpha : x \to x^{-\alpha}\mathbf{1}_{x>1}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on que f_α est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue ?

Exercice 9 *Critère d'intégrabilité en mesure finie*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ une application mesurable.

1. Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} = [|f|]$, où $[\cdot]$ est la fonction partie entière.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty$.
3. On suppose que μ est finie. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty$ implique $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. L'hypothèse μ finie est-elle nécessaire ?

Exercice 10

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{X}$ tel que $\mu(A_\varepsilon) < \infty$, f est bornée sur A_ε et
$$\int_{\mathbb{X}\setminus A_\varepsilon} |f| \, d\mu < \varepsilon.$$
(On pourra considérer les ensembles $B_n = \{2^{-n} \leq |f| \leq 2^n\}$ et appliquer le théorème de convergence monotone aux fonctions $|f|\mathbf{1}_{B_n}$.)
2. En déduire que
$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall A \in \mathcal{X}, \mu(A) < \eta \Longrightarrow \int_A |f| \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Exercice 11 *Théorème d'Egoroff*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ et une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions mesurables réelles.

1. Montrer que l'ensemble de convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ peut s'écrire
$$C = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{i,j\geq n} \left\{|f_i - f_j| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge μ-p.p. vers une fonction mesurable f au sens où $\mu(C^{\complement}) = 0$. On définit pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $A_n^k = \cup_{p=1}^{n} \cap_{i\geq p} \{|f_i - f| \leq 1/k\}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_{k,\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu((A_{n_{k,\varepsilon}})^{\complement}) < \varepsilon/2^k$.
3. En déduire le théorème d'Egoroff : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{X}$ tel que $\mu(A_\varepsilon^{\complement}) < \varepsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur A_ε.
4. L'hypothèse μ finie est-elle indispensable ?

TD3 : Intégrale

Exercice 1 *Quelques calculs d'intégrales contre des mesures discrètes*

Par définition :

1.
$$\int x\ \mu_1(dx) = 1/2 \quad \text{et} \quad \int x^2\ \mu_1(dx) = 1/2;$$

2.
$$\int x\ \mu_2(dx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kp^k(1-p)^{n-k} = np \quad \text{et} \quad \int x^2\ \mu_2(dx) = np(1-p) + n^2p^2.$$

3.
$$\int x\ \mu_3(dx) = \alpha \quad \text{et} \quad \int x^2\ \mu_3(dx) = \alpha(\alpha+1).$$

Exercice 2 *Entropie*

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\nu(\{k\}) = e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!} = e^{1-\alpha}\alpha^k e^{-1}\frac{1}{k!} = f_\alpha(k)\mu(\{k\}),$$
d'où $\nu = f_\alpha \cdot \mu$. On calcule
$$H(\nu|\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} f_\alpha(k)\log f_\alpha(k)\mu(\{k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{1-\alpha}\alpha^k[1-\alpha+k\ln\alpha]e^{-1}\frac{1}{k!} = (1-\alpha)+\alpha\ln\alpha.$$
Comme ν et μ ont même support, $f_\alpha(k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\mu = \frac{1}{f_\alpha}\cdot\nu$. On obtient
$$H(\mu|\nu) = \int \frac{1}{f_\alpha}\log\frac{1}{f_\alpha}\ d\nu = -\int \log f_\alpha\ d\mu = -(1-\alpha) - \ln\alpha = \alpha - 1 - \ln\alpha.$$
Il est clair en dérivant que $\alpha \to \alpha - 1 - \ln\alpha$ est positive croissante sur $[1,\infty)$ et s'annule en $\alpha = 1$.
2. Nous avons
$$H(\mu_1|\mu_2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_1(k)\log\frac{\mu_1(k)}{\mu_2(k)} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2(1-p)^n} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2n(1-p)^{n-1}},$$
$$H(\mu_1|\mu_3) = -\frac{1}{2}\log(2e^{-\alpha}) - \frac{1}{2}\log(2\alpha e^{-\alpha}),$$
et
$$H(\mu_2|\mu_3) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\log\left[\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{p}{\alpha}\right)^k(1-p)^{n-k}\right].$$

Exercice 3

On munit $\overline{\mathbb{R}}_+$ de la tribu borélienne et on se donne $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ alors
$$\{\min(f,n) \geq a\} = \{f \geq a\} \cap \{n \geq a\},$$
or f est mesurable ainsi que la fonction constante $x \to n$. Pour cette dernière, il suffit de remarquer que $\{n \geq a\}$ est soit $\mathbb{X}$, soit $\emptyset$ qui sont des ensembles mesurables.
La suite de fonctions positives (f_n) est croissante ($f_{n+1} \geq f_n$) et cnverge simplement vers f. Le théorème de convergence monotone implique que $\lim_{n\to\infty}\int f_n\ d\mu = \int f\ d\mu$.

Exercice 4 *Mesure image*

1. On a $\nu(\emptyset) = \mu(\phi^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Soit $(A_n) \in \mathcal{Y}^{\mathbb{N}}$, alors
$$\nu(\cup A_n) = \mu\phi^{-1}(\cup A_n) = \mu\left(\cup\phi^{-1}(A_n)\right) = \sum \mu\phi^{-1}(A_n) = \sum \nu(A_n),$$
ce qui montre que ν est une mesure.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $\phi^{-1}(\{k\}) = [k, k+1)$, d'où $\nu(\{k\}) = 1$, c'est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

3. Si f est la fonction étagée positive $\sum \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$, alors
$$\nu(f) = \sum \alpha_i \nu(A_i) = \sum \alpha_i \mu(\phi^{-1} A_i) = \mu(f \circ \phi).$$
Ces égalités ont un sens dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et on remarque que $\nu(f) < \infty$ si et seulement si $\mu(f \circ \phi) < \infty$. Si f est mesurable positive, on peut trouver une suite croissante (f_n) de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f. Alors
$$\nu(f_n) = \mu(f_n \circ \phi),$$
et l'égalité $\nu(f) = \mu(f \circ \phi)$, qui a lieu encore dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, provient du théorème de convergence monotone. Si f est mesurable, alors $|f|$ et $|f \circ \phi|$ sont mesurables positives et $\nu(|f|) < \infty$ si et seulement si $\mu(|f \circ \phi|) < \infty$, aussi f est ν-intégrable si et seulement si $f \circ \phi$ est μ-intégrable. On termine en décomposant $f = f^+ - f^-$ en partie positive et négative et en remarquant que $f \circ \phi = f^+ \circ \phi - f^- \circ \phi$ est la décomposition idoine pour $f \circ \phi$.

Exercice 5 *Convergence monotone décroissante*

1. On pose, pour tout $n \geq 0$, $g_n = f_0 - f_n$ alors (g_n) est une suite croissante de fonctions mesurable positive. On remarque que f_0 est finie presque partout et donc $\lim g_n = f_0 - \lim f_n$. Le théorème de convergence monotone implique
$$\lim \int g_n \, d\mu = \int f_0 \, d\mu - \lim \int f_n \, d\mu = \int f_0 \, d\mu - \int \lim f_n \, d\mu.$$
d'où le résultat.
2. L'hypothèse est importante pour deux raisons. Premièrement, elle permet d'identifier la limite simple de g_n : si on ne peut pas assurer que f_0 est finie presque partout, alors $\lim f_0 - f_n \neq f_0 - \lim f_n$. Deuxièmement, elle permet de simplifier les $\int f_0 \, d\mu$ de chaque côté de l'égalité.
3. Il s'agit de la continuité à gauche d'une mesure.

Exercice 6

On peut écrire en notant μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^*$:
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^m} = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^x} \, \mu(dx) \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}} = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^x} \, \mu(dx).$$
Par convergence monotone, on intervertir somme et intégrale :
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$
et
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m-2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^2 - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n(2n-1)} < \infty.$$

Exercice 7 *Intervertion de limite et d'intégrale*

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim f_n(x) = e^x \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
2. On a pour $n \geq 1$ et $x \in [0, n]$
$$g_n(x) = (n+1) \log(1 + x/(n+1)) - n \log(1 + x/n),$$
Posons $h(x, y) = y \log(1 + x/y)$ et montrons que $y \to h(x, y)$ est croissante sur $[1, \infty)$ pour tout $x \in [0, y]$. Pour cela, on calcule les deux premières dérivées partielles :
$$\partial_2 h(x, y) = \log(1 + x/y) - y \frac{x/y^2}{1 + x/y} = \log(1 + x/y) - \frac{x}{y + x} \quad \text{et} \quad \partial_2^2 h(x, y) = -\frac{x}{y^2} \frac{1}{1 + x/y} + \frac{x}{(x+y)^2}$$
d'où
$$\partial_2^2 h(x, y) = -\frac{x}{y^2} \frac{1}{1 + x/y} + \frac{x}{(x+y)^2} = \frac{x}{y^2(1 + x/y)^2} - \frac{x}{y^2(1 + x/y)} = \frac{x - x(1 + x/y)}{y^2(1 + x/y)^2} = \frac{x^2}{y^3(1 + x/y)^2} \geq 0.$$
Ainsi, $\partial_2 h(x, y) \geq \partial_2 h(x, 1) = \log(1 + x) - \frac{x}{1+x}$. Or,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(1 + x) - \frac{x}{1 + x} = \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{(1 + x)^2} = \frac{1 + x}{(1 + x)^2} \geq 0.$$
Aussi, $y \to h(x, y)$ est croissante si bien que $g_n(x) = h(x, n+1) - h(x, n) \geq 0$ pour tout $x \in [0, n]$. D'où, pour tout $x \in [0, n]$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Par ailleurs, si $x > n$, il est immédiat que $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ puisque $f_n(x) = 0$. Finalement, $(f_n)_n \geq 0$ est une suite croissante de fonctions mesurables et positives.

3. Le théorème de convergence monotone implique que

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\ d\mu = \int_0^\infty f\ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}e^k = \frac{ep}{1-ep}.$$

Exercice 8 *Un critère d'intégrabilité en mesure infinie*

Par le théorème de convergence monotone pour $|f|$ mesurable positive

$$\int |f|\ d\mu = \int \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f|\mathbf{1}_{2^n\le|f|<2^{n+1}}\ d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int |f|\mathbf{1}_{2^n\le|f|<2^{n+1}}\ d\mu.$$

L'estimation suivante est alors immédiate

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n\mu(2^n\le|f|<2^{n+1}) \le \int |f|\ d\mu \le 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n\mu(2^n\le|f|<2^{n+1}).$$

Des estimées standards montre que f_α est Lebesgue intégrable si et seulement si

$$\sum_{n=-\infty}^{\lfloor\alpha\rfloor} 2^{n(1-1/\alpha)}(1-2^{-1/\alpha})$$

est finie. La condition se transforme en $\alpha > 1$.

Exercice 9 *Critère d'intégrabilité en mesure finie*

1. Il est immédiat que si $\mathbf{1}_{|f|\ge n}(x) = 1$ alors pour tout $k = 1,\ldots,n$, $\mathbf{1}_{|f|\ge k}(x) = 1$. De plus, si $n_0(x)$ est le plus grand entier tel que $|f(x)|\ge n_0$, alors pour tout $n > n_0(x)$, $\mathbf{1}_{|f|\ge n}(x) = 0$. Ainsi

$$\sum_{n\ge 1}\mathbf{1}_{|f|\ge n}(x) = n_0(x) = [|f(x)|].$$

2. Evidemment, $[|f|]\le|f|$ donc par convergence monotone

$$\infty > \int |f|\ d\mu \ge \int [|f|]\ d\mu = \int \sum_{n\ge 1}\mathbf{1}_{|f|\ge n}\ d\mu = \sum_{n\ge 0}\mu(|f|\ge n).$$

3. Nous avons encore $|f|\le[|f|]+1$, d'où par convergence monotone

$$\int |f|\ d\mu \le \int [|f|]+1\ d\mu \le \sum_{n\ge 1}\mu(|f|\ge n) + \mu(\mathbb{X}),$$

or la borne à droite est finie. La condition de μ finie est nécessaire. Pour un contre-exemple, considérer μ la mesure comptage sur $\mathbb{N}^*$ et $x\to 1/x$.

Exercice 10

1. La suite $(|f|\mathbf{1}_{B_n})$ est positive croissante, par le théorème de convergence monotone

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_n}|f|\ d\mu = \int |f|\ d\mu < \infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit N tel que

$$0 \le \int |f|\ d\mu - \int_{B_n}|f|\ d\mu < \varepsilon.$$

On pose alors $A_\varepsilon = B_n$, f est effectivement bornée sur A_ε et la condition sur l'intégrale est trivialement vérifiée. De plus, on vérifie, par croissance de l'intégrale

$$\infty > \int |f|\ d\mu \ge \int |f|\mathbf{1}_{B_n}\ d\mu \ge 2^{-n}\mu(B_n)$$

d'où $\mu(B_n) < \infty$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\int |f| \mathbf{1}_{B_{n_0}^\complement} \leq \varepsilon/2$. Pour cet entier n_0, on pose $\eta = 2^{-n_0-1}\varepsilon$. Soit maintenant $A \in \mathcal{X}$ tel que $\mu(A) < \eta$. Alors, on calcule

$$\int_A |f| \, d\mu = \int \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B_{n_0}} |f| \, d\mu + \int \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{B_{n_0}^\complement} |f| \, d\mu \leq 2^{n_0}\mu(A) + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

Exercice 11 *Théorème d'Egoroff*

1. L'ensemble C correspond à l'ensemble des points $x \in \mathbb{X}$ pour lesquels $(f_n(x))$ est de Cauchy c'est à dire convergente.
2. Soit $k \geq 1$. On remarque que A_n^k est une suite croissante en n, de plus

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n^k = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{i\geq n} \{|f_i - f| \leq 1/k\}.$$

   Enfin, on montre que C est contenu dans cette réunion. En effet, soit $x \in C$, alors, il existe $n \geq 1$ tel que pour tout $i, j \geq n$, $|f_i(x) - f_j(x)| \leq 1/k$ si bien que pour tout $i \geq n$, $|f_i(x) - f(x)| \leq 1/k$. Autrement si dit, pour tout $k \geq 1$, $x \in \cup_{n\geq 1} A_n^k$. Ainsi, on déduit

$$\mu(C) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n^k) \iff \mu(C^\complement) = \lim_{n\to\infty} \mu((A_n^k)^\complement),$$

   car $\mu(\mathbb{X}) < \infty$. Comme $\mu(C^\complement) = 0$ et que $((A_n^k)^\complement)_{n\geq 0}$ est décroissante en $n \geq 1$, il vient l'existence de $n_{k,\varepsilon} \geq 1$ tel que $\mu((A_{n_{k,\varepsilon}}^k)^\complement) \leq \varepsilon/2^k$.
3. Soit $\varepsilon > 0$, alors posons $A_\varepsilon = \cap_{k\geq 1} A_{n_{k,\varepsilon}}^k$, on a

$$\mu(A_\varepsilon^\complement) = \mu\left(\bigcup_{k\geq 1} (A_{n_{k,\varepsilon}}^k)^\complement\right) \leq \sum_{k\geq 1} \mu((A_{n_{k,\varepsilon}}^k)^\complement) = \varepsilon,$$

   et clairement (f_n) converge uniformément vers f sur A_ε.
4. On peut prendre comme contre-exemple la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et $f_n = \mathbf{1}_{\{n\}}$. Alors f_n converge simplement vers 0 mais pour tout A tel que $\mu(A^\complement) < 1/2$, c'est à dire $A = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}$ privé d'un point, il n'y a pas convergence uniforme.

TD4 : Intégration et théorèmes limites

Exercice 1 *Intégrabilité et comportement à l'infini*

Construire une application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+$,
2. $\int f \, d\lambda < \infty$,
3. pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\sup_{t \geq a} f(t) = \infty$.

Exercice 2 *Intégrabilité et convergence uniforme*

Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions mesurables positives sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ convergeant uniformément vers 0 et vérifiant l'une des propriétés suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n n'est pas intégrable,
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int f_n \, d\lambda = 1$,
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable et $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \infty$.

Exercice 3 *Intervertion limite-somme*

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$:

$$\text{(i) } u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+nk+1}\,; \qquad \text{(ii) } u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n^2}{kn^2+k^2}\,; \qquad \text{(iii) } u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n; \qquad \text{(iv) } u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n+k}{nk^{3/2}+k^3}.$$

Exercice 4 *Intervertion limite-intégrale*

Dans chacun des exemples suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\text{(i) } u_n = \int_0^1 \frac{n}{1+x^2}\sin(x/n)\, dx\,; \qquad \text{(ii) } u_n = \int_0^\infty \frac{ne^{-x}}{nx+1}\, dx\,; \qquad \text{(iii) } u_n = \int_0^1 \frac{(\sin x)^n}{\sqrt{x}}\, dx\,;$$

$$\text{(iv) } u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{(\sin t)^n}{t(1+t)}\, \lambda(dt)\,; \qquad \text{(v) } u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\, dt\,; \qquad \text{(vi) } u_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\pi(1+|t|^{2+1/n})}\,;$$

$$\text{(vii) } u_n = \int_0^1 \left(1 - e^{-t^2/n}\right) dt\,; \qquad \text{(viii) } u_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{ne^{t^2}+1}{ne^{2t^2}+4t^2}\, dt\,; \qquad \text{(ix) } u_n = \int_0^n \frac{1}{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{-t/n}\, dt\,;$$

$$\text{(x) } u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin u}{u^2}\frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}}\, du\,; \qquad \text{(xi) } u_n = \int_0^\infty \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}}\, dx.$$

Exercice 5

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 0}$ une partition de $\mathbb{X}$. Montrer que pour toute fonction mesurable positive

$$\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{a[x]} \, \lambda(dx) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{[x]!} \, \lambda(dx),$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière et λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 6 *Autour du théorème de convergence dominée*

On munit l'ensemble $[0,1]$ de la tribu boréliene et de la mesure de Lebesgue. Pour $n \geq 3$, on pose $f_n = \frac{n}{(\log n)^2}\mathbf{1}_{[0,1/n]}$. Montrer que

1. pour tout $n \geq 3$, la fonction f_n est intégrable,
2. que la suite $(f_n)_{n\geq 3}$ tend vers 0 presque partout et $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 0$.

Déterminer la fonction $\sup_{n\geq 3} f_n$. Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont-elles vérifiées ? En modifiant l'exemple précédent, montrer que l'on peut trouver une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions qui ne satisfont pas les conditions d'application du théorème de convergence dominée mais vérifient les points 1 et 2 ci-dessus.

Exercice 7 *Autour du théorème de Fatou, théorème de Young*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$, $(g_n)_{n\geq 0}$ et $(h_n)_{n\geq 0}$ trois suites de fonctions réelles intégrables par rapport à μ vérifiant

1. pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{X}$, $g_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x)$;
2. $(f_n)_{n\geq 0}$ (*resp.* $(g_n)_{n\geq 0}$, $(h_n)_{n\geq 0}$) convergent simplement vers f, (*resp.* vers g et h) ;
3. que h et g sont intégrables et $\lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu = \int h \, d\mu$ et $\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int g \, d\mu$.

Montrer que f est intégrable et $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Exercice 8

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable telle que $\int_A f \, d\mu = 0$ pour tout $A \in \mathcal{X}$. Montrer que f est nulle presque partout. *(On pourra commencer par supposer f à valeurs réelles.)*

Exercice 9

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$ et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer $\int_{\mathbb{R}_+} f(x) \, dx$ et $\sum_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) \, dx$. Commenter.

Exercice 10

On se place sur l'espace de Borel standard $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{si } x \geq 2/n. \end{cases}$$

   Calculer $\liminf \int f_n \, d\lambda$, $\int \liminf f_n \, d\lambda$, $\limsup \int f_n \, d\lambda$ et $\int \limsup f_n \, d\lambda$.
2. Même question avec la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ telle que $g_{2p} = \mathbf{1}_{[0,1/(2p)]}$ et $g_{2p-1} = \mathbf{1}_{[1/(2p-1),1]}$, $p \geq 1$.
3. Commenter.

Exercice 11 *Critère d'intégrabilité*

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $x \to \exp(-c\sqrt{x})$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \infty[$.
2. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $x \to x^\alpha \exp(-c\sqrt{x})$ soit Lebesgue intégrable sur $[0, \infty[$. Même question sur $[1, \infty[$.
3. Déterminer l'ensemle des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \to x^\alpha (\log x)^\beta$ est Lebesgue intégrable sur $]0, 1]$. Même question sur $[1, \infty[$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx} \, dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer f'' et les limites en ∞ de f et f'.
3. En déduire une expression de f. Que vaut $f(0)$? Justifier.

Exercice 13

1. Montrer que la fonction $f : x \to \frac{\sin x}{e^x - 1}$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \infty[$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, la quantité $f(x)$ peut encore s'écrire sous la forme $\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} \sin(x)$. Est-ce vrai pour $x = 0$?
3. En déduire que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1} \, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 14

1. Montrer que $h : \theta \to \log(1 - \sin^2\theta)$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \pi/2[$.
2. On considère la fonction $F : t \to \int_0^{\pi/2} \log(1 + t\sin^2\theta) \, d\theta$.
   (a) Montrer que F est définie et continue sur $[-1, \infty[$.
   (b) Montrer que F est C^1 sur $] - 1, \infty[$ et que

$$\forall t \in]-1, \infty[\quad F'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{1 + t\sin^2\theta} \, d\theta.$$

3. (a) Montrer que pour tout $t \in]-1, \infty[$, $F'(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})}$.
   (b) En déduire que pour tout $t \in]-1, \infty[$, $F(t) = \pi[\log(1+\sqrt{1+t}) - \log 2]$.

Exercice 15

Le but de cet exercice est de montrer que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi/2$.

1. (a) Montrer que l'intégrale impropre $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ est convergente.
   (b) La fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Pour $t \geq 0$, on pose $S(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx$.
   (a) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, \infty[$. Calculer $S'(t)$ pour tout $t > 0$.
   (b) Déterminer la limite de S en ∞ puis $S(t)$ pour tout $t > 0$.
3. Soit $A > 0$ et $t > 0$. Montrer que
$$\left| \int_A^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx \right| \leq 2/A.$$
4. Montrer que pour tout $A > 0$,
$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^A e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx.$$
5. Conclure.

Exercice 16 *Transformée de Fourier*

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. La transformée de Fourier de f est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx}\, dx.$$

1. Pourquoi $\hat{f}$ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que si f est paire, alors $\hat{f}$ est à valeurs réelles.
3. Montrer que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose de plus que $x \to x^k f(x)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer la transformée de Fourier des donctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $f_2 = e^{-|x|}$.

Exercice 17 *Transformée de Fourier d'une probabilité*

Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que l'application $\phi_\mu : t \to \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mu(dx)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer ϕ_μ pour les probabilités suivantes

(a) $\mu_1 = \frac{\delta_0 + \delta_1}{2}$; (b) $\mu_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{-k} \delta_k$; (c) $\mu_3 = \sum_{k=0}^\infty e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k$, avec $\alpha > 0$.

TD4 : Intégration et théorèmes limites

Exercice 1 *Intégrabilité et comportement à l'infini*

Il suffit de considérer une infinité de triangles isocèles, centrés en n, dont la base de largeur de l'ordre de n^{-3} et la hauteur de l'ordre de n.

Exercice 2 *Intégrabilité et convergence uniforme*

1. $f_n(x) = 1/n$.
2. $f_n = 1/(2n)\mathbf{1}_{[-n,n]}$.
3. $f_n = 1/\sqrt{n}\mathbf{1}_{[-n,n]}$.

Exercice 3 *Intervertion limite-somme*

1. On a $u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k^2+nk+1}\mathbf{1}_{1\leq k\leq n}$, or $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{k^2+nk+1}\mathbf{1}_{1\leq k\leq n} = 1/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Enfin, le lemme de Fatou
$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \sum_{k=1}^{\infty} \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{k^2+nk+1}\mathbf{1}_{1\leq k\leq n} \leq \liminf_{n\to\infty} u_n.$$
2. Même raisonnement.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n \mathbf{1}_{1\leq k\leq n^2} = 0,$$
et
$$\left|\frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n \mathbf{1}_{1\leq k\leq n^2}\right| \leq 1/k^2.$$
Or $\sum_{k\geq 1} 1/k^2 < \infty$. Par convergence dominée, $\lim u_n = 0$.
4. Pour $k \geq 1$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+k}{nk^{3/2}+k^3} = 1/k^{3/2}.$$
D'autre part, pour tout $n \geq 1$ et $k \geq 1$,
$$\frac{n+k}{nk^{3/2}+k^3} = \frac{1}{k^{3/2}}\frac{n+k}{n+k^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}}\frac{n+k}{n+k} = 1/k^{3/2},$$
car $n + k^{3/2} \geq n + k$. Le théorème de convergence dominée implique que $\lim u_n = \sum_{k\geq 1} 1/k^{3/2}$.

Exercice 4 *Intervertion limite-intégrale*

1. Pour tout $x \in [0,1]$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin(x/n)}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$. Comme $\sin x \leq x$ sur $[0,1]$, on obtient la majoration de l'intégrande par $\frac{x}{1+x^2}$ qui est intégrable. D'où
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n\sin(x/n)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\ln 2}{2}.$$
2. L'intégrande, qui est positive, converge simplement p.p. vers $x \to e^{-x}/x$ qui n'est pas intégrable au voisinage de zéro. Le lemme de Fatou implique que $\lim_n u_n = \infty$.
3. On domine par $x \to 1/\sqrt{x}$, d'où $\lim_n u_n = 0$.
4. On vérifie facilement que l'intégrande converge vers 0 pour $t \neq 0$ modulo π, donc elle converge p.p. vers la fonction nulle. Puis, on fait la majoration suivante pour $n \geq 1$
$$\left|\frac{(\sin t)^n}{t(1+t)}\right| = \left|\frac{(\sin t)^n}{t(1+t)}\mathbf{1}_{(0,1)}(t) + \frac{(\sin t)^n}{t(1+t)}\mathbf{1}_{[1,\infty)}(t)\right| \leq \frac{1}{1+t}\mathbf{1}_{[0,1]}(t) + \frac{1}{|t(1+t)|}\mathbf{1}_{[1,\infty)]}(t),$$
et cette fonction est intégrable. Le théorème de convergence dominée implique que $\lim u_n = 0$.
5. On applique le même principe que pour la suite précédente.
6. Sur $[-1,1]^{\complement}$, on majore par $\frac{1}{\pi(1+t^2)}$. Sur $[-1,1]$, c'est majoré par 1. On peut appliquer le théorème de convergence dominée et $\lim_n u_n = 1$.

7. Le théorème de convergence dominée, avec la domination par 1, on obtient $\lim_n u_n = 0$.
8. C'est encore de la convergence dominée avec la domination par e^{-t^2}. D'où $\lim_n u_n = \int e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.
9. On fait le changement de variables $u = t/n$ et on obtient $u_n = \int_0^1 (1+u)e^{-u}\, du$, la suite u_n est constante.
10. On écrit

$$u_n = v_n + w_n = \int_0^1 \frac{\sin u}{u^2} \frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}}\, du + \int_1^\infty \frac{\sin u}{u^2} \frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}}\, du.$$

La suite (w_n) est convergente par le théorème de convergence dominée avec la domination par $1/u^2$. Mais (v_n) est divergente vers ∞ par le lemme de Fatou. Donc $\lim_n u_n = \infty$.
11. On décompose l'intégrale pour chaque $n \geq 1$ sur $[0,1]$ et $[1,\infty]$. La première est convergente par le théorème de convergence dominée et la domination par $1/\sqrt{x}$. Elle converge vers $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$. Pour la deuxième, on utilise la domination $1/x^{3/2}$ qui est vérifiée dès que $n \geq 1$. Elle converge vers 0. D'où $\lim_n u_n = 2$.

Exercice 5

On écrit $f_n = \sum_{k=0}^n f\mathbf{1}_{A_k}$. Alors (f_n) est suite positive croissante convergeante vers f puisque (A_n) est une partition. Le théorème de convergence dominée implique l'égalité annoncée.
On a

$$\int_0^\infty e^{a[x]}\, dx = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} e^{a[x]}\, dx = \sum_{k\geq 0} e^{ak}.$$

L'intégrale vaut donc ∞ si $a \geq 0$ et $(1-e^a)^{-1}$ pour $a < 0$.
De même,

$$\int_0^\infty \frac{1}{[x]!}\, dx = \sum_{n\geq 0} 1/n! = e.$$

Exercice 6 *Autour du théorème de convergence dominée*

Pour tout $n \geq 3$, f_n est positive et d'intégrale $\int f_n\, d\lambda = 1/(\log n)^2 \to 0$. De plus, pour $x \in (0,1]$, $\lim_n f_n(x) = 0$ et $\lim_n f_n(0) = \infty$ donc $\lim_n f_n(x) = 0$ p.p.. On a

$$\sup_{n\geq 3} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (1/3,1], \\ \frac{[1/x]}{(\log[1/x])^2} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $[\cdot]$ est la partie entière. Il est clair que $g = \sup_{n\geq 3} f_n$ est la plus petite fonction de domination pour la suite (f_n). Il s'agit de vérifier si $\int g\, d\lambda < \infty$, c'est à dire

$$\int_0^3 \frac{[1/x]}{(\log[1/x])^2}\, dx.$$

Or, pour $[1/x]$ est l'unique entier $k \geq 0$ tel que $k \leq 1/x < k+1$, c'est à dire $x \in (1/(k+1), 1/k]$ donc

$$\int g\, d\lambda = \sum_{k\geq 3} \int_{1/k+1}^{1/k} \frac{k}{(\log k)^2}\, dx = \sum_{k\geq 3} \frac{1}{(k+1)(\log k)^2} < \infty.$$

Les conditions du théorème de convergence dominée sont donc satisfaites.
Si on remplace le $\log^2$ par un log, il est facile de voir que toutes les conditions sont remplies, sauf l'intégrabilité de g — $\sum_k \frac{1}{(k+1)\log k} = \infty$ — qui est la meilleure domination possible. On a trouvé un exemple de converge dans $\mathbf{L}^1$ sans domination intégrable.

Exercice 7 *Autour du théorème de Fatou*

Tout d'abord, la fonction f est intégrable, car $|f| \leq |g| \vee |h|$ qui sont deux fonctions intégrables. Ensuite, en appliquant le lemme de Fatou

$$\int f - g\, d\mu \leq \liminf_n \int f_n - g_n\, d\mu \leq \liminf_n \int f_n\, d\mu - \int g\, d\mu,$$

si bien que $\int f\, d\mu \leq \liminf_n \int f_n\, d\mu$. D'un autre côté, en appliquant le lemme de Fatou à $h - f$, on a

$$\int h - f\, d\mu \leq \liminf_n \int h_n - f_n\, d\mu \leq \int h\, d\mu + \liminf_n - \int f_n\, d\mu,$$

si bien que $\int f\, d\mu \geq -\liminf_n - \int f_n\, d\mu = \limsup_n \int f_n\, d\mu$.En définitive, $\limsup_n \int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu \leq \liminf_n \int f_n\, d\mu$. D'où le résultat.

Exercice 8

On suppose d'abord f à valeurs réelles. On écrit $f = f^+ - f^-$ et posons $A = \{f^- = 0\}$, alors en remarquant que $f^+ \mathbf{1}_{A^\complement} = 0$ (partout !), on obtient

$$0 = \int_A f \; d\mu = \int_A f^+ \; d\mu - \int_A f^- \; d\mu = \int f^+ \; d\mu.$$

L'inégalité de Markov implique que $f^+ = 0$ p.p.. De façon analogue, on obtient $f^- = 0$ p.p.. Enfin $\mu(\{f \neq 0\}) = \mu(\{f^+ > 0\} \cup \{f^- > 0\}) \leq \mu(f^+ > 0) + \mu(f^- > 0) = 0$.
Si f est à valeurs complexes, alors $f = \mathsf{Re}\; f + i\mathsf{Im}\; f$. Or, $\int_A f \; d\mu = 0$ si et seulement si $\mathsf{Re}\; \int_A f \; d\mu = \int_A \mathsf{Re}\; f \; d\mu = 0$ et $\mathsf{Im}\; \int_A f \; d\mu = \int_A \mathsf{Im}\; f \; d\mu = 0$. D'où le résultat.

Exercice 9

Pout tout $x > 0$ la série de fonctions converge évidemment simplement et

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x) = 1 + \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{2}{1 - e^{-2x}} = \frac{-1 - e^{-2x} + 2e^{-x}}{1 - e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x}}.$$

On vérifie facilement que $\sum_{n \geq 1} \int f_n \; d\lambda = 0$. D'autre part, en faisant le changement de variable $X = e^{-x}$, tout se simplifie relativement bien et on trouve $\int f \; d\lambda = \log 2$.
Moralité, la positivité des termes d'une série est primordiale lorsque l'on veut intervertir somme et intégrale. Ou, de manière équivalente, on ne peut pas se passer de l'hypothèse de monotonie dans Beppo-Lévy !

Exercice 10

1. La courbe représentative de f_n est essentiellement un triangle isocèle de hauteur n, de base $2/n$ et centrée en $1/n$. Aussi $\int f_n \; d\lambda = 1$ si bien que $\liminf \int f_n \; d\lambda = \limsup \int f_n \; d\lambda = 1$. D'un autre côté, $\liminf f_n = \limsup f_n = 0$ et donc $\int \liminf f_n \; d\lambda = \int \limsup f_n \; d\lambda = 0$.
2. On vérifie facilement que $\int g_{2p} \; d\lambda = 1/2p$ et $\int g_{2p-1} \; d\lambda = 1 - 1/(2p-1)$. Donc $\liminf \int g_n \; d\lambda = \lim \int g_{2p} \; d\lambda = 0$ et $\limsup \int g_n \; d\lambda = \lim \int g_{2p-1} \; d\lambda = 1$. D'un autre côté, $\lim g_{2p} = 0$ et $\lim g_{2p-1} = 1$ donc $\liminf g_n = 0$ et $\limsup g_n = 1$.
3. Ces deux exemples montrent que le lemme de Fatou est optimal, on ne peut pas caractériser le cas d'égalité ou d'inégalité.

Exercice 11 *Critère d'intégrabilité*

1. D'après un exercice fait dans la planche précédente, une fonction f est intégrable si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \lambda(2^n \leq |f| < 2^{n+1})$. Or, dans notre cas, on vérifie que pour $n \geq 0$, les termes de cette séries sont nuls. Il s'agit donc de vérifier la sommabilité de $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} \lambda(2^{-n} \leq |f| < 2^{-n+1})$. Or,

$$2^{-n} \leq e^{-c\sqrt{x}} \leq 2^{-n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(n-1)^2 \log(2)^2}{c^2} \leq x \leq \frac{n^2 \log(2)^2}{c^2}.$$

Donc $\lambda(2^{-n} \leq |f| \leq 2^{-n+1}) = O(n)$, la série converge et cette fonction est intégrable.
2. On utilise le même critère. Il faut étudier la fonction $f(x) = x^\alpha \exp(-c\sqrt{x})$, calculons la dérivée,

$$f'(x) = \left[\frac{\alpha}{x} - \frac{c}{2\sqrt{x}}\right] \exp\left[\alpha \ln x - c\sqrt{x}\right].$$

On remarque que si $\alpha \leq 0$ alors $f' \leq 0$, sinon f' est positive sur $[0, 4\alpha^2/c^2]$ et négative sur $[4\alpha^2/c^2, \infty)$. Considérons le cas $\alpha > 0$, alors on montre facilement que $0 \leq f(x) \leq K \exp(-cx^{1/4} = g(x)$. En adaptant les calculs de la question précédente, on voit que

$$\lambda(2^{-n} \leq |g| \leq 2^{-n+1}) = O(n^3) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \lambda(2^{-n} \leq |g| \leq 2^{-n+1}) < \infty.$$

De même que précédemment, $\sum_{n \geq 0} 2^n \lambda(2^n \leq |g| \leq 2^{n+1}) = 0$ car $\|g\|_\infty = 1$. Ainsi, la fonction $g \in \mathbf{L}^1(\lambda)$ et $f \in \mathbf{L}^1(\lambda)$ pour tout $\alpha > 0$.
Considérons le cas $\alpha < 0$ (le cas $\alpha = 0$ a déjà été fait. On remarque tout d'abord que $f = f\mathbf{1}_{(0,1)} + f\mathbf{1}_{[1,\infty)}$ et que $0 \leq f\mathbf{1}_{[1,\infty)} \leq e^{-c\sqrt{x}}$. Au passage, cela montre que f est intégrable sur $[1, \infty)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Il reste à étudier la fonction $f\mathbf{1}_{(0,1)}$. Or, comme $\alpha < 0$

$$2^n \leq x^\alpha e^{-c\sqrt{x}} \mathbf{1}_{(0,1)} \leq 2^{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{(n+1)/\alpha} e^c \leq x \leq 2^{n/\alpha}.$$

Donc, $f\mathbf{1}_{(0,1)}$ est intégrable si et seulement si

$$\sum_{n \geq 0} 2^n 2^{n/\alpha} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > -1.$$

3. Considérons d'abord le cas $[1,\infty)$, on regardera le cas $(0,1)$ dans un second temps à l'aide d'un changement de variables. Notons que si $\alpha > 0$ alors il existe $M \geq 1$ tel que $g(x) = x^\alpha (\ln x)^\beta \geq 1$ et g est trivialement non intégrable. Si $\alpha = 0$, comme g est positive, nous pouvons faire le changement de variable $x = e^t$:
$$\int_1^\infty (\ln x)^\beta \, dx = \int_0^\infty t^\beta e^t \, dt.$$
Comme précédemment, la fonction $t \to t^\beta e^t$ est minorée par 1 au voisinage de l'infini et est donc trivialement non intégrable.
Soit $\alpha < 0$. Si $\beta \geq 0$ alors g est trivialement non intégrable pour $\alpha \in (0,1]$. Si $\alpha < -1$, on vérifie facilement que $0 \leq g(x) \leq K x^{(\alpha-1)/2}$ et g est intégrable.
Reste le cas $\alpha < 0$ et $\beta < 0$. Rappelons que la fonction g est positive, donc elle sera intégrable si elle intégrable au voisinage de 1 et ∞. Soit $R > 1$. Au voisinage de l'infini, nous avons
$$\int_R^\infty x^\alpha (\ln x)^\beta \, dx = \int_{\ln R}^\infty e^{(1+\alpha)t} t^\beta \, dt.$$
Lorsque $\alpha > -1$, l'intégrande est non minorée par 1 au voisinage de l'infini. Lorsque $\alpha < -1$, une majoration brutale par $e^{(1+\alpha)t}$ de l'intégrande permet de conclure à l'intégrabilité de g. Si $\alpha = -1$, alors g est intégrale pour $\beta < -1$ et non intégrable pour $\beta \in (-1,0)$.
Par un calcul similaire,
$$\int_1^R x^\alpha (\ln x)^\beta \, dx = \int_0^{\ln R} e^{(1+\alpha)t} t^\beta \, dt.$$
Or, il existe $m, M > 0$ telles que pour tout $t \in [0, \ln R]$, $m \leq e^{(1+\alpha)t} \leq M$, donc g est intégrable au voisinage de 1 si et seulement si $\beta \in (0,-1)$. Finalement, g est intégrable sur $[1,\infty)$ si et seulement si $\alpha < -1$ et $\beta \geq 0$.
Pour finir :
$$\int_0^1 x^\alpha (\ln x)^\beta \, dx = \int_1^\infty y^{-\alpha-2} (-\ln y)^\beta \, dy$$
et il suffit d'utiliser le critère précédent.

Exercice 12

1. On montre d'abord que f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_*^+$. Il est clair que l'intégrande est deux fois dérivable pour $t > 0$, de dérivée seconde $t \to (\sin x)^2 e^{-tx}$. Pout tout $a > 0$ et tout $t \in (a,\infty)$, cette fonction est dominée par $x \to e^{-ax}$ p.p.. On montre ainsi que f est deux fois dérivable sur (a,∞) pour tout $a > 0$ donc dérivable sur $(0,\infty)$. Elle est en particulier continue sur $(0,\infty)$.
Soit (t_n) une suite de réels strictement positifs convergent vers 0. Alors, la fonction $x \to (\sin x)^2/x^2 e^{-t_n x}$ converge vers $(\sin x)^2/x^2$ et est dominée par $(\sin x)^2/x^2$ qui positive et intégrable. Donc $\lim_{t\to 0} f(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} \, dx = f(0)$, et f est continue en 0.
2. Par un argument analogue que pour la continuité, $f(\infty) = 0$. On a également que $f'(\infty) = 0$: on utilise une domination $x \to e^{-Ax}$ qui est valide dès que $t \geq A$.
3. Nous pouvons procéder par intégration par parties :
$$f''(t) = \int_0^\infty \sin^2 x \, d\left(\frac{-e^{-tx}}{t}\right) = \frac{2}{t}\int_0^\infty \cos(x)\sin(x) e^{-tx} \, dx.$$
Encore une fois :
$$f''(t) = \frac{2}{t^2}\int_0^\infty [\cos^2(x) - \sin^2(x)] e^{-tx} \, dx = \frac{2}{t^3} - \frac{4}{t^2} f''(t).$$
Donc $f''(t) = \frac{2}{t^3+4t} = \frac{2}{t}\frac{1}{t^2+4}$.
Il s'agit de trouver une primitive de f''. Pour cela, on décompose l'expression de f'' en fraction irréductible :
$$\frac{2}{t}\frac{1}{4+t^2} = \frac{a}{t} + \frac{b+ct}{4+t^2}.$$
Il vient immédiatement que $a = 1/2$. Le polynôme $4+t^2$ s'annule en $2i$ et $-2i$ ce qui donne les équations
$$\begin{cases} \frac{2}{2i} = b + 2ic \\ -\frac{2}{2i} = b - 2ic \end{cases}.$$
En sommant les deux lignes on trouve $b = 0$, puis $c = -1/2$. Finalement,
$$f''(t) = \frac{1}{2t} - \frac{t}{2(t^2+4)}.$$

On déduit, $f'(t) = \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4}\ln(t^2+4) + K = K + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{t^2}{t^2+4}\right)$. Comme $f'(\infty) = 0$, $K = 0$ et $f'(t) = \frac{1}{2}\ln(t) - \frac{1}{4}\ln(4+t^2)$. On obtient en intégrant directement le premier terme et en faisant une IPP pour le second

$$f(t) = K + \frac{1}{2}\int^t \ln x\; dx - \frac{1}{4}\int^t \ln(4+x^2)\; dx = K + \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t\ln(4+t^2) + \frac{1}{4}\int^t \frac{2x^2}{4+x^2}\; dx.$$

Ensuite $\frac{x^2}{4+x^2} = 1 - \frac{4}{4+x^2}$, d'où

$$\int^t \frac{x^2}{4+x^2}\; dx = t - 2\arctan(t/2).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} f(t) = K + \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}t\ln(4+t^2) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\arctan(t/2) &= K + \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{4}t\ln(4+t^2) - \frac{1}{2}\arctan(t/2) \\ &= K + \frac{t}{4}\ln\left(\frac{t^2}{4+t^2}\right) - \frac{1}{2}\arctan(t/2). \end{aligned}$$

Remarquons que le premier terme est équivalent à $-1/t$ lorsque $t \to \infty$ (faire un dl). On conclut :

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \frac{t}{4}\ln\left(\frac{t^2}{4+t^2}\right) - \frac{1}{2}\arctan(t/2).$$

On déduit $f(0) = \pi/4$, en particulier $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\; dx = \pi/4$.

Exercice 13

1. Il est assez simple de voir que $|f(x)| \leq Ke^{-x}$ pour un certain $K > 0$.
2. On calcule

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\sin(x) = \sin(x)e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}\sin(x)}{1-e^{-x}} = \frac{\sin(x)}{e^x - 1}.$$

   Pour $x = 0$, la forme analytique n'est pas définie $e^0 - 1 = 0$, mais la série l'est, elle vaut 0.
3. Intervertissons somme et intégrale en utilisant le théorème de convergence dominée appliqué à $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} e^{-nx}|\sin(x)|$ et la domination $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}|\sin(x)|$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1}\; dx &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\sin(x)\; dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-nx}\sin(x)\; dx \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{Im} \int_0^\infty e^{-nx+ix}\; dx = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{Im}\, \frac{1}{n-i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}. \end{aligned}$$

Exercice 14

1. Comme $\theta \to \ln(1 - \sin^2(\theta))$ est négative sur $[0, \pi/2)$, l'intégrable de Lebesgue a un sens dans $\overline{\mathbb{R}_-}$. Il reste à montrer que cette intégrale est finie. On calcule en faisant le changement de variable $\theta = \pi/2 - x$

$$\int_0^{\pi/2} |\ln(1-\sin^2(\theta))|\; d\theta = -2\int_0^{\pi/2} \ln\cos(\theta)\; d\theta = -2\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(\theta))\; d\theta.$$

   L'intégrande est de signe constant continue sauf en 0 où elle est équivalent à $\ln\theta$ qui est intégrable en 0.
2. (a) Soit $M > 0$. La fonction $t \to \ln(1 + t\sin^2\theta)$ est continue sur $[-1, \infty)$ pour presque tout θ. De plus, nous avons la domination, pour tout $t \in [-1, M]$, $\ln(1 + t\sin^2(\theta)) \leq M\sin^2(\theta)$, or $\theta \to \sin^2(\theta)$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \pi/2]$. Le théorème de continuité sous le signe somme implique que F est définie et continue sur $[-1, M]$. Comme M peut être rendu arbitrairement grand, il vient que F est définie et continue sur $[-1, \infty)$.

   (b) Soit $(a, b) \subset (-1, \infty)$ un intervalle ouvert. D'après la question précédente, pour tout $t \in (a, b)$, la fonction $\theta \to \ln(1 + t\sin^2(\theta))$ est intégrable sur $[0, \pi/2]$.

   Pour presque tout $\theta \in [0, \pi/2]$, la fonction $t \to \ln(1 + t\sin^2\theta)$ est dérivable sur (a, b) de dérivée $t \to \frac{\sin^2(\theta)}{1+t\sin^2(\theta)}$. Cette dernière fonction est décroissante en $t \in (-1, \infty)$ pour presque tout $\theta \in [0, \pi/2]$, ainsi, nous la majoration

$$\left|\frac{\sin^2\theta}{1+t\sin^2\theta}\right| \leq \frac{\sin^2\theta}{1+a\sin^2(\theta)}.$$

   Cette domination est bornée donc intégrable sur $[0, \pi/2]$. Ainsi, F est dérivable sur (a, b) de dérivée $F'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\theta}{1+t\sin^2\theta}\; d\theta$. Les réels a, b étant arbitraire, ceci reste vrai sur l'intervalle $(-1, \infty)$ entier.

3. (a) On commence par faire le changement de variable $u = \sin^2(\theta)$:

$$\theta = \arcsin\sqrt{u} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{\sqrt{1-u}}.$$

On obtient :

$$F'(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{u}{1-u}}\frac{du}{1+tu}.$$

Puis, on pose $v = \sqrt{\frac{u}{1-u}}$:

$$v^2(1-u) = u \quad \Longleftrightarrow \quad u = \frac{v^2}{1+v^2} \quad \Longrightarrow du = \frac{2v\ dv}{(v^2+1)^2}.$$

Finalement,

$$F'(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2v^2\ dv}{(v^2+1)^2\left(1+\frac{tv^2}{v^2+1}\right)} = \int_0^\infty \frac{v^2\ dv}{(v^2+1)^2+tv^2(v^2+1)} = \int_0^\infty \frac{v^2\ dv}{(v^2+1)(1+(1+t)v^2)}$$

En décomposant l'intégrande en fraction irréductible, nous obtenons

$$\frac{v^2}{(v^2+1)(1+(1+t)v^2)} = \frac{1}{t(v^2+1)} - \frac{1}{t(1+(1+t)v^2)}.$$

Il vient :

$$F'(t) = \frac{\pi}{2t} - \frac{1}{t}\left[\frac{\arctan(\sqrt{1+t}v)}{\sqrt{1+t}}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2t} - \frac{\pi}{2t\sqrt{1+t}} = \frac{\pi}{2t}\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})}.$$

(b) On vérifie que $F'(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})}$. Ceci montre que $F(t) = \pi\ln(1+\sqrt{1+t}) + K$. De plus, on a clairement $F(0) = 0$, d'où $K = -\pi\log 2$.

Exercice 15

1. (a) Soit $A > 0$, la fonction $x \to \sin(x)/x$ est continue sur $[0, A]$ donc Riemann intégrable. En posant $N_A = [A/\pi]$, on a de plus

$$\int_0^A \frac{\sin(x)}{x}\ dx = \sum_{k=0}^{N_A-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin(x)}{x}\ dx + \int_{N_A\pi}^A \frac{\sin(x)}{x}\ dx. \tag{1}$$

On majore brutalement la seconde intégrale par $1/N_A$ qui tend vers 0 lorsque A tend vers l'infini. D'un autre côté, pour $k = 0, \ldots, N_A - 1$, on fait le changement de variable $x = y + k\pi$, on obtient

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin(x)}{x}\ dx = \int_0^\pi \frac{\sin(y+k\pi)}{y+k\pi}\ dy = (-1)^k\int_0^\pi \frac{\sin(y)}{y+k\pi}\ dy.$$

Ainsi, dans (1), la série est une série alternée. Il vient facilement pour tout $k \geq 1$ et $y \in [0, \pi]$ que

$$\frac{\sin y}{y+(k-1)\pi} \leq \frac{\sin(y)}{y+k\pi},$$

d'où la décroissance de la suite $\left(\int_0^\pi \frac{\sin y}{y+k\pi}\ dy\right)_{k\geq 0}$. Une majoration brutale donne que cette suite tend vers 0. Ceci montre la convergence de l'intégrale impropre.

(b) La fonction $x \to \sin(x)/x$ n'est pas Lebesgue intégrable. Pour le voir, il suffit de conisdérer $x \to |\sin(x)|/x$, et de remarquer que la décomposition précédante est toujours valide mais aboutit à une série divergente (on minore le terme général par $1/(k+1)\pi$).

2. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $t > \varepsilon$, il est clair que $x \to \frac{\sin x}{x}e^{-tx}$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \infty)$. La fonction $t \to \frac{\sin(x)}{x}e^{-tx}$ est également dérivable sur $]\varepsilon, \infty[$ de dérivée $t \to \sin(x)e^{-tx}$. On utilise le théorème de convergence dominée avec la domination de la dérivée par $x \to e^{-\varepsilon x}$ qui est intégrable. Comme $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement, S est dérivable sur $]0, \infty[$ de dérivée

$$S'(t) = \int_0^\infty -\sin(x)e^{-tx}\ dx = -\mathsf{Im}\int_0^\infty e^{-(t-i)x}\ dx = -\frac{1}{1+t^2}, \quad t > 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $t \to \sin(x)e^{-tx}$ est continue sur $]\varepsilon, \infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, en dominant par $x \to e^{-\varepsilon x}$, on obtient la continuité de S' sur $]\varepsilon, \infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc sur $]0, \infty[$.

(b) Soit (t_n) une suite réels positifs tendant vers ∞. Par des dominations très similaires aux questions précédentes, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-t_n x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} \lim_{n\to\infty} e^{-t_n x}\, dx = 0.$$

Une primitive de $t \to -1/(1+t^2)$ est $t \to \alpha - \arctan(t)$. D'où $S(t) = \pi/2 - \arctan t$.

3.

4. Soit (t_n) une suite de réels positifs tendant vers 0. Alors à l'aide de la domination par $x \to |\sin(x)|/x$ qui est intégrable sur $[0, A]$ comme fonction continue sur un compact, on applique le théorème de convergence dominée qui nous donne le résultat.

5. Les deux points précédant implique que pour tout $N > 1$

$$\Gamma(t) = \left| \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \le \left| \int_0^{N\pi} e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_0^{N\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \right|$$
$$+ \left| \int_{N\pi}^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_{N\pi}^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \le (\star) + 2/N\pi.$$

Soit $\varepsilon > 0$, choisissons N tel que $1/N\pi < \varepsilon/2$ et $\delta > 0$ tel que $t \in (0, \delta)$ implique $(\star) < \varepsilon/2$. On obtient donc, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $t \in (0, \delta)$ implique $\Gamma(t) < \varepsilon$. Ceci montre que S est en fait continue en 0, donc $I = S(0) = \lim_{t\to 0^+} \pi/2 - \arctan(t) = \pi/2$.

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_0^A e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x}\, dx + \int_A^\infty e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_0^A \frac{\sin(x)}{x}\, dx + O(1/A).$$

Ainsi, en passant à la limite en $A \to \infty$ on obtient en substance que S est continue en 0 et comme $I = S(0)$ on obtient $I = \pi/2$.

Exercice 16 *Transformée de Fourier*

1. Comme $|f(x)e^{itx}| = |f(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité de f assure que $t \to \hat{f}(t)$ est bien définie.
2. Trivial.
3. Convergence dominée.
4. Convergence dominée.
5. Exercice.

Exercice 17 *Transformée de Fourier d'une probabilité*

1. Il suffit de remarquer que $|e^{itx}| = 1$ est intégrable si μ est une probabilité.
2. Exercice.

TD5 : Mesure produit

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ par $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}([0,1])$-mesurable.
2. Calculer $\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\ dx\right)\ dy$ et $\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\ dy\right)\ dx$. Conclure.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne positive.

1. Montrer que l'ensemble $A_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\right\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ et calculer $\lambda_2(A_f)$.
2. Même question pour le graphe de f défini par $G_f = \left\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\right\}$.
3. En déduire que $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = 0$, $\lambda(dy)$-p.p..

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\ dx$ est bien définie et vaut également $I = -2\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\ dx$.
2. Calculer, en justifiant, de deux façons différentes l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$ et en déduire la valeur de I.
3. Déduire de la question précédante et d'un développement en série entière de $1/(1-x^2)$ les égalités

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 4

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soient f et g deux fonctions mesurables positives sur $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.

1. Montrer que $A = \{(x,t) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}_+ : f(x) \geq t\} \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
2. Montrer que $\int_{\mathbb{X}} f\ d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f \geq t\})\ \lambda(dt)$.
3. En déduire que pour tout $p \geq 1$, $\int_{\mathbb{X}} g^p\ d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1}\mu(\{g \geq t\})\ \lambda(dt)$.
4. Que dire de $\int_{\mathbb{X}} \phi \circ f\ d\mu$ si ϕ est croissante de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0.
5. En considérant l'application de $\mathbb{X}\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, notée F, qui à (x,s,t) associe $\mathbf{1}_{[s,\infty[}(f(x))\mathbf{1}_{[t,\infty[}(g(x))$, montrer que

$$\int_{\mathbb{X}} fg\ d\mu = \int_{\mathbb{R}_+^2} \mu(\{f \geq s\} \cap \{g \geq t\})\ dsdt.$$

Exercice 5

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer, si elles existent, les intégrales itérées $\int_I \int_I f(x,y)\ dxdy$ et $\int_I \int_I f(x,y)\ dydx$.

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \text{ avec } I = [0,1] \quad \text{et} \quad f(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \text{ et } 0 < y - x \leq 1, \\ 2 & \text{si } x > 0 \text{ et } 1 < y - x \leq 2, \\ -1 & \text{si } x > 0 \text{ et } 2 < y - x \leq 3, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{avec } I = \mathbb{R}.$$

Exercice 6

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\ dx \quad \text{et} \quad g(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}\ dx.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et g sur $\mathbb{R}_+$.

2. Calculer $f(t)$ pour tout $t>0$ en partant de l'égalité $\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xy)\, dy$.
3. Calculer $g(t)$ pour tout $t>0$ en partant de l'égalité $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x}\, dy$. En déduire $g(0)$.

Exercice 7 *Intégration par parties*

1. Soient μ et ν deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On désigne par F et G leurs fonctions de répartition respectives, c'est à dire
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \mu(]-\infty, x]) \quad \text{et} \quad G(x) = \nu(]-\infty, x]).$$
Pour des réels fixés a et b, avec $a<b$, on définit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < y \leq x \leq b\}$. En calculant de deux façons différentes $\mu \otimes \nu(A)$, montrer que
$$\int_{]a,b]} F(t^-)\nu(dt) + \int_{]a,b]} G(t)\mu(dt) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$
2. Soient f et g deux fonctions mesurables positives et λ-intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\, d\lambda \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} g\, d\lambda.$$
Montrer que F et G sont les fonctions de répartitions de deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. En déduire que
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a<b, \quad \int_{[a,b]} F(x)g(x)\, dx + \int_{[a,b]} f(x)G(x)\, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$
3. Que se passe-t-il dans la question précédante si l'on remplace la mesure de Lebesgue λ par la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$?

Exercice 8 *Convolution*

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^d}(\lambda_d)$. On définit le produit de convolution de f avec g, noté $f*g$, sur $\mathbb{R}^d$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\, dt.$$

1. Montrer que $f*g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^d}$ et que $f*g = g*f$.
2. Calculer $f*g$ pour $f = g = \mathbf{1}_{[0,1]}$ (d=1). Commenter.
3. Montrer que si f est de classe C^k à support compact, alors il en va de même pour $f*g$.
4. Montrer que si f et g sont positives d'intégrale 1, il en va de même pour $f*g$.
5. Montrer que $\widehat{f*g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$. *(On pourra supposer $d=1$.)*

TD5 : Mesure produit

Exercice 1

1. La fonction f est continue donc mesurable.
2. On calcule
$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}_+} 2e^{-2xy} - e^{-xy}\ dxdy = 0,$$
et
$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^1 f(x,y)\ dydx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}(1-e^{-x})\ dx = \log 2.$$
En réalité, nous sommes pas obligé de savoir calculer exactement l'intégrale. En fait, l'intégrande est positive continue et n'est pas la fonction nulle, donc l'intégrale est strictement positive.
Conclusion : l'intervertion des intégrales n'est pas licite. Ce que l'on constate, c'est que la fonction f n'est pas de signe constant. Une étude un peu poussée montrerait qu'elle n'est pas intégrable non plus.

Exercice 2

1. On pose $h(x,y) = f(x) - y$. C'est clairement une fonction borélienne que somme de deux applications boréliennes. On remarque $A_f = h^{-1}([0,\infty)) \cap \mathbb{R} \times [0,\infty))$ donc A_f est un borélien. Ensuite, en utilisant le théorème de Fubini pour les fonctions positives et la décomposition de A_f en tranche verticale, on obtient
$$\lambda_2(A_f) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{A_f}(x,y)\ \lambda(dx)\lambda(dy) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,f(x)]}(y)\ \lambda(dy)\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\ \lambda(dx).$$
2. La mesurabilité de G_f vient du fait que $G_f = h^{-1}(\{0\})$ où h est la fonction mesurable définie par $h(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$.
Soit ϕ une fonction continue strictement positive et intégrable sur $\mathbb{R}$. Introduisons pour $n \geq 1$, l'ensemble $G_f^n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x) - \phi(x)/n \leq y \leq f(x) + \phi(x)/n\}$. En utilisant cette fois-ci, les fonctions $h_{n,\pm}(x,y) = f(x) \pm \phi(x)/n - y$, $G_f^n = h_{n,+}^{-1}([0,\infty)) \cap h_{n,-}^{-1}((-\infty,0]) \cap \mathbb{R} \times [0,\infty)$, pour tout $n \geq 1$, G_f^n est un borélien. En utilisant, le théorème de Fubini pour les fonctions positives et la décomposition de G_f^n en tranche verticale, on obtient
$$\lambda_2(G_f^n) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2\phi(x)}{n} = O(1/n).$$
Ceci montre en particulier que $\lambda_2(G_f^n) < \infty$ pour tout $n \geq 1$. De plus $G_f = \cap_{n\geq 1} G_f^n$ (ceci montre d'une autre façon la mesurabilité de G_f, soit dit en passant). Ainsi,
$$\lambda_2(G_f) = \lambda_2(\cap_n G_f^n) = \lim_n \lambda_2(G_f^n) = 0.$$
3. En reprenant les notations du cours, nous avons que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\} = (G_f)^y$ est la section horizontale de G_f. Le théorème de Fubini pour les fonctions positives implique
$$0 = \lambda_2(G_f) = \int_{\mathbb{R}} \lambda((G_f)^y)\ \lambda(dy),$$
or la fonction $y \to \lambda((G_f)^x)$ est mesurable positive, elle est donc nulle presque partout.

Exercice 3

1. La fonction $x \to \log(x)/(x^2-1)$ est mesurable positive donc l'intégrale est bien définie. On calcule
$$I = \int_0^1 \frac{\log x}{x^2-1}\ dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\ dx.$$
Dans la seconde intégrale, faire le changement de variable $x = 1/y$ pour les fonctions positives, après simplification, on obtient le résultat.

2. On utilise le théorème de Tonelli pour intervertir l'ordre d'intégration. On obtient d'une part

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)} = \int_0^\infty \frac{[\arctan(\sqrt{y}x)]_0^\infty}{(1+y)\sqrt{y}}\, dy,$$

puis en faisant le changement de variables $y = z^2$, on obtient finalement

$$\pi \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2} = \pi^2/2.$$

D'autre part, une décomposition en fraction irréductible donne

$$\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{1+y} - \frac{x^2}{1+x^2y}\right].$$

Une primitive (en y) est donnée par

$$\frac{\log\left(\frac{1+y}{1+x^2y}\right)}{1-x^2}.$$

D'où,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)}\, dx = -2\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1-x^2}\, dx = 2I.$$

Donc $I = \pi^2/4$.

3. Le développement en série entière de $(1-x^2)^{-1}$ est donné par

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n\geq 0} x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Le théorème de convergence monotone appliqué à $x \to -\log x \sum_{n\geq 0} x^{2n}$ et une intégration parties donne

$$I = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 -2\log(x)x^{2n}\, dx = \sum_{n\geq 0}\int_0^1 -2\log(x)d\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = 2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^2} = \pi^2/8.$$

Le calcul de la deuxième série se déduit facilement en découpant la somme sur les entiers pairs et impairs.

Exercice 4

1. Voir exercice 2.
2. Voir exercice 2.
3. Il suffit de remarquer que

$$\int g^p\, d\mu = \int_0^\infty \mu(g \geq t^{1/p})\, dt,$$

et faire le changement de variables $t = y^p$.

4. Le principe est le même puisque ϕ est bijective d'inverse C^1, on fait un changement de variable $t = \phi(y)$. On obtient

$$\int \phi \circ f\, d\mu = \int_0^{\|\phi\|_\infty} \mu(f \geq t)\phi'(t)\, dt.$$

5. On observe que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \mu(\{f \geq s\} \cap \{g \geq t\})\, dsdt = \int_{\mathbb{X}\times\mathbb{R}_+^2} F(x,s,t)\, \mu(dx)dsdt.$$

Puis par le théorème de Tonelli,

$$\int_{\mathbb{X}\times\mathbb{R}_+^2} F(x,s,t)\, \mu(dx)dsdt = \int_{\mathbb{X}}\left[\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{[s,\infty)}(f(x))\, ds \int \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}\mathbf{1}_{[t,\infty)}(g(x))\, dt\right]\mu(dx).$$

Enfin,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{[s,\infty)}(f(x))\, ds = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{[0,f(x)]}(s)\, ds = f(x).$$

D'où le résultat.

Exercice 5

Exercice 6

1. Soit $t > 0$ et (t_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers t. Par le théorème de convergence dominée avec domination par $x \to Ke^{-t_0 x}$ où $t_0 = \inf t_n$ donne la continuité de f en t. La fonction g est de même continue sur $\mathbb{R}_+$ en utilisant la dominant par
$$x \to \left(\frac{|\sin x|}{x}\right)^2.$$
2. Une fois l'ordre d'intégration interverti par le Fubini-Lebesgue, on écrit que cos est la parti réelle d'une exponentielle complexe. On trouve
$$f(t) = t\int_0^1 \frac{dy}{t^2+y^2} = \frac{1}{t}\left[t\arctan(y/t)\right]_0^1 = \arctan(1/t) \to_{t\to 0} \pi/2.$$
Remarquons qu'on retrouve la valeur trouvée dans l'exercice 15 du TD 4, cependant il faudrait montrer que cette limite est effectivement $f(0)$ ce qui en soi était l'aspect technique de l'exercice en question.
3. On utilise l'astuce de la question précédente et le théorème de Fubini-Lebesgue, on obtient
$$\begin{aligned} g(t) = \int_0^1\int_0^1\int_0^\infty 2y\cos(2xyz)e^{-tx}\ dxdydz = \int_0^1\int_0^1 \frac{2ty}{t^2+4y^2z^2}\ dydz &= \int_0^1 \frac{t}{4z^2}\log(1+4z^2/t^2)\ dz \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{1/t}\frac{\log(1+4u^2)}{u^2}\ du. \end{aligned}$$
Une primitive est donnée par
$$G(x) = 4\arctan(2x) - \frac{\log(1+4x^2)}{x},$$
d'où
$$g(t) = \arctan(2/t) - t\log(1+4/t^2), \quad \text{et} \quad g(0) = \pi/2,$$
par continuité de g en 0 (noter, en effet, que cette forme analytique est valide seulement pour $t > 0$).

Exercice 7 *Intégration par parties*

1. D'une part, on a
$$\mu\otimes\nu(A) = \int \mathbf{1}_{]a,b]}(x)\int \mathbf{1}_{]a,x]}(y)\ \nu(dy)\mu(dx) = \int_{]a,b]} G(t)\ \mu(dt) - [F(b)-F(a)]G(a).$$
D'autre part,
$$\mu\otimes\nu(A) = \int \mathbf{1}_{]a,b]}(x)\int \mathbf{1}_{[y,b]}(x)\ \mu(dx)\nu(dy) = [G(b)-G(a)]F(b) - \int_{]a,b]} F(t^-)\ \nu(dt).$$
Ces deux quantités sont égales par le théorème de Tonelli d'où l'égalité.
2. On définit μ et ν pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ respectivement par
$$\mu(A) = \int \mathbf{1}_A f\ d\lambda \quad \text{et} \quad \nu(A) = \int \mathbf{1}_A g\ d\lambda.$$
On vérifie facilement que μ et ν ainsi définie sont des mesures. Comme f et g sont intégrables, elles sont finies. Enfin, par définition, F et G sont les fonctions de répartitions des mesures μ et ν respectivement.
On applique l'égalité précédente à ces fonctions de répartition en remarquant que les mesures μ et ν ne chargent pas les singletons si bien que l'on peut fermer les intervalles et remplacer $F(t^-)$ par $F(t)$. On obtient alors
$$\int_{[a,b]} F(x)g(x)\ dx + \int_{[a,b]} f(x)G(x)\ dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$
3. Si on remplace la mesure de Lebesgue par la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$, on ne peut plus fermer les intervalles systématiquement et $F(t^-) = F(t-1)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Au final, on obtient pour tout $a < b \in \mathbb{Z}$,
$$\sum_{k=a+1}^{b} F(k-1)g(k) + \sum_{k=a+1}^{b} f(k)G(k) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

En introduisant la notation $\Delta F(k) = F(k) - F(k-1)$ d'où

$$\sum_{k=a+1}^{b} F(k-1)\Delta G(k) + \sum_{k=a+1}^{b} \Delta F(k)G(k) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

Il s'agit en réalité de la transformation d'Abel. Comme exercice, on pourra en déduire le critère d'Abel pour les séries numériques.

Exercice 8 *Convolution*

1. Nous avons par Tonelli
$$\int |f * g(x)|\ dx \leq \int\int |f(x-t)||g(t)|\ dxdt = \|f\|_1\|g\|_1.$$
On fait le changement de variables $t = x - u$ qui est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans lui-même, on obtient
$$f * g(x) = \int f(x-t)g(t)\ dt = \int f(u)g(x-u)\ du = g * f.$$
2. C'est la fonction triangle supportée par $[0, 2]$ et de hauteur maximum 1.
3. C'est de la convergence dominée : en remarquant que les dérivées sont continues donc bornées sur les compacts on obtient à chaque fois une domination par $\|f^{(k)}\mathbf{1}_K\|_\infty g$ où K est un compact tel que $f^{(k)}\mathbf{1}_{K^C} = 0$.
4. Par le théorème de Tonelli
$$\int\int f(x-t)g(t)\ dtdx = \int g(t)\int f(x-t)\ dxdt = \int g(t)\ dt = 1.$$
5. Le théorème de Fubini-Lebesgue et l'invariance par translation donne
$$\widehat{f * g}(t) = \int f * g(x)e^{itx}\ dx = \int\int f(x-y)g(y)e^{itx}\ dydx = \int\int e^{ity}g(y)f(x-y)e^{it(x-y)}\ dxdy = \int \widehat{f}(t)g(y)e^{ity}\ dy,$$
d'où l'égalité.

TD6 : Changement de variables et convolution

Exercice 1 *Normalisation de la gaussienne*

Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ par $f(x,y) = y \exp\left(-y^2(1+x^2)/2\right)$. Après avoir justifié que f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$, montrer en calculant de deux façons différentes $\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y)\, dxdy$ que

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 2

Calculer, en justifiant, les intégrales suivantes

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \sin(y) e^{-(x+y)}\, dxdy \quad \text{et} \quad \int_\Delta xy^2\, dxdy,$$

où Δ est le domaine intérieur au triangle ABC avec $A = (0,-1)$, $B = (1,3)$ et $C = (0,1)$.

Exercice 3 *Fonction Gamma d'Euler*

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx$.

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-u^2/2}\, du = \sqrt{\pi}$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1/2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer, en considérant le changement de variables $x = \phi(u) = t + u\sqrt{t}$ que
$$\Gamma(t+1) = t^t \sqrt{t} e^{-t} \int_{-\sqrt{t}}^\infty \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}}\, du.$$
3. En déduire que, pour toute suite de réels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers ∞,
$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{e}{t_n}\right)^{t_n} \frac{\Gamma(t_n+1)}{\sqrt{t_n}} \geq \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\, du = \sqrt{2\pi}.$$
4. Montrer que $\lim_{t\to\infty} \int_{-\sqrt{t}}^0 \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On pourra pour cela poser $u = -v$ et remarquer que pour tout $x \in]-1,0]$, $\log(1+x) \leq x - x^2/2$.
5. Montrer que $\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On pourra étudier les variations de la fonction suivante : $x \to \log(1+x) - x + x^2/(2(1+x))$.
6. Établir la formule de Stirling étendue : $\Gamma(t+1) \sim_{t\to\infty} \left(\frac{t}{e}\right)^t \sqrt{2\pi t}$.

Exercice 4 *Fonction Beta d'Euler*

Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$. Soit ϕ la fonction de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ par

$$\phi(x,y) = \left(x+y, \frac{x}{x+y}\right).$$

On fixe a, b deux réels strictement positifs.

1. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
2. Déterminer graphiquement $\phi(]-\infty,-1]^2)$, $\phi(]0,\infty[^2)$ et $\phi(]0,1]^2)$.
3. Montrer que la fonction $f : v \to v^{a-1}(1-v)^{b-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(v)$ est Lebesgue intégrable.
4. Soit ν la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité f. Montrer que
$$\int_{]0,\infty[^2} e^{-(x+y)} x^{a-1} y^{b-1}\, dxdy = \nu(\mathbb{R})\Gamma(a+b).$$
En déduire $\nu(\mathbb{R})$.

Exercice 5 *Fonction Beta d'Euler, suite*

On pose $B(a,b) = \int_{]0,1[} v^{a-1}(1-v)^{b-1}\,dv$ pour a,b des réels. Soient p,q,r et s des réels strictement positifs.

1. Calculer, en fonction de B, l'intégrale
$$J = \int_D x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}(1-x-y-z)^{s-1}\,dxdydz,$$
où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : x+y+z < 1\}$. On pourra utiliser le changement de variables
$$X = x+y+z, \quad Y = \frac{y+z}{x+y+z}, \quad Z = \frac{z}{x+y+z}.$$
2. Exprimer J en fonction de Γ. Qu'obtient-on lorsque p,q,r et r sont des entiers.

Exercice 6 *Calcul d'intégrales multiples*

1. Pour le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1/2 < x+y < 1\}$, calculer $\int_D \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\,dxdy$.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+2y^2 < 2, 0 < y < x\}$. Trouver un difféomorphisme T de D dans $D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2, 0 < v < 1\}$. Calculer $\int_D \frac{x^2-y^2}{x^2}\,dxdy$.
3. Calculer $\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ pour des réels non nuls a,b.

Exercice 7

Soient A une matrice réelle $m \times m$ symétrique définie positive et B une matrice de taille $m \times m$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp -\langle Ax,x\rangle\,dx = \sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^m} \langle Bx,x\rangle \exp -\langle Ax,x\rangle\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}}\,\mathrm{trace}\,(BA^{-1}),$$
où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^m$.

Exercice 8

1. Montrer que l'application $\phi : (x,y) \to (x+y, xy)$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même est un C^1-difféomorphisme de
$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\} \quad \text{dans} \quad V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0, u^2 > 4v\}.$$
2. Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x+y < 4, xy > 1, x < y\}$. Calculer l'intégrale, après avoir justifié son existence, $\int_\Delta (x^2-y^2)\cos(xy)\,dxdy$.

Exercice 9 *Volume d'une boule*

On cherche à calculer le volume V_n de la boule euclidienne B_n de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, définie par
$$B_n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq 1\}.$$
On note λ_n la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ (donc $V_n = \lambda_n(B_n)$).

1. Calculer V_1 et V_2.
2. Soit $n \geq 3$, montrer que
$$V_n = V_{n-2}\int_{B_2}(1-x_1^2-x_2^2)^{(n-2)/2}\,d\lambda_2(x_1,x_2).$$
3. En déduire que $V_n = \frac{2\pi}{n}V_{n-2}$ et que $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.
4. Montrer que $\lambda_n(rB_n) = r^dV_n$ pour tout $r \geq 0$.

Exercice 10 *Effet régulariant de la convolution*

Calculer le produit de convolution $\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]}$. Commenter.

Exercice 11 *Approximation de l'identité*

Soit $\phi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int \phi\,d\lambda_d = 1$. Pour tout $n \geq 1$, on définit ϕ_n par $\phi_n(x) = n^d\phi(nx)$. Montrer que $(\phi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de l'approximation de l'identité.

Exercice 12 *Transformée de Fourier, transformée inverse*

Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$. On rappelle que la transformée de Fourier de f est définie par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle t,x\rangle}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}^d$$

où $\langle \cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. On considère pour tout $n \geq 1$ la fonction a_n définie par

$$a_n(x) = (2\pi)^{-d} \exp\left(-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{d} |x_i|\right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Calculer la fonction $\alpha_n = \hat{a}_n$ et montrer que c'est une approximation de l'unité.
2. Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,
$$\alpha_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} a_n(t)\hat{f}(t) e^{-i\langle t,x\rangle}\, dt.$$
3. En déduire la formule d'inversion de Fourier
$$(2\pi)^d f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{-i\langle t,x\rangle}\, dt = \hat{\hat{f}}(-x), \quad \lambda_d - p.p.\ .$$
4. On pose $f(x) = e^{-a|x|}$ où $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Calculer $\hat{f}$ et en déduire la transformée de Fourier de $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 13 *Densité des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$*

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite à support compact si il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que $f(x) = 0$ dès que $x \notin K$.
On définit $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right] & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
2. Donner une suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ d'approximation de l'identité d'éléments de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
3. Justifier l'inclusion $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$.
4. Montrer que $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_1} = \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$.
5. Que peut-on dire à propos de $C_c^k(\mathbf{R}^d)$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables à support compact ?

TD6 : Changement de variables et convolution

Exercice 1 *Normalisation de la gaussienne*

La fonction f est mesurable positive de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}_+$. On peut appliquer le théorème de Tonelli. Ainsi, d'une part

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y)\ dxdy = \int_0^\infty \left[-\frac{exp(-y^2(1+x^2)/2}{1+x^2} \right]_0^\infty\ dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\ dx = \pi/2.$$

Et d'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y)\ dxdy = \int_0^\infty ye^{-y^2/2} \int_0^\infty e^{-x^2y^2/2}\ dxdy.$$

On fait le changement de variable $u = xy$ et on obtient

$$\int_0^\infty e^{-y^2/2} \int_0^\infty e^{-u^2/2}\ dudy = \left(\int_0^\infty e^{-y^2/2}\ dy \right)^2$$

D'où le résultat.

Exercice 2

Tout d'abord par le théorème de Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\sin(y)e^{-(x+y)}|\ dxdy \leq \int_0^\infty e^{-x}\ dx \int_0^\infty e^{-y}\ dy = 1.$$

Ceci montre la condition d'intégrabilité nécessaire à l'application du théorème de Fubini. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \sin(y)e^{-x-y}\ dxdy = \int_0^\infty \sin(y)e^{-y}\ dy = 1/2.$$

Pour la deuxième intégrale, la fonction $(x,y) \to xy^2$ est continue sur le compact Δ donc bornée sur ce compact Δ. Ainsi, elle est intégrable et le théorème de Fubini donne

$$\int_\Delta xy^2\ dxdy = \int_0^1 \int_{4x-1}^{2x+1} xy^2\ dydx = \int_0^1 -\frac{56}{3}x^3 + \frac{20}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\ dx = \dots$$

Exercice 3 *Fonction Gamma d'Euler*

1. Par une IPP,
$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x}\ dx = [-e^{-x}x^t]_0^\infty + t\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\ dx = t\Gamma(t).$$
On calcule $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$. Ainsi, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on montre que $\Gamma(n) = (n-1)!$.
Il suffit de faire le changement de variable $x = y^2/2$ et il vient l'égalité
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-y^2/2}\ dy = \sqrt{\pi},$$
d'après l'exercice 1.
On a la relation de récurrence pour tout $n \geq 1$
$$\Gamma(n+1/2) = \Gamma((n-1/2)+1) = (n-1/2)\Gamma((n-1)+1/2) \quad \Longrightarrow \Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi}\prod_{k=1}^n \frac{2(n-k)+1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\frac{(2n-1)!}{2(n-1)!}.$$
2. Faire le changement de variable demandé.
3. Par la question précédante, nous avons
$$\left(\frac{e}{t_n}\right)^{t_n} \frac{\Gamma(t_n+1)}{\sqrt{t_n}} = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-\sqrt{t_n},\infty[}(u) \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t_n}}\right)^{t_n} e^{-u\sqrt{t_n}}\ du.$$
Le lemme de Fatou implique que
$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{e}{t_n}\right)^{t_n} \frac{\Gamma(t_n+1)}{\sqrt{t_n}} \geq \int_{\mathbb{R}} \liminf \mathbf{1}_{[-\sqrt{t_n},\infty[}(u) \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t_n}}\right)^{t_n} e^{-u\sqrt{t_n}}\ du.$$
La limite inf dans l'intégrale est en fait une limite : pour voir ça, passer à la forme exponentielle/log, puis utiliser une dl à l'odre 2 du log et on obtient le résultat.

4. La limite est clair si on arrive à justifier l'intervertion limite/intégrale. En utilisant la forme exponentielle/log et l'indication, on trouve une domination par $u \to e^{-u^2/2}$. Plus précisément,

$$e^{-u\sqrt{t}}e^{t\log(1+u/\sqrt{t})} \leq e^{-u^2/2}, \quad u/\sqrt{t} \in]-\sqrt{t}, 0].$$

On conclut par le théorème de convergence dominée. Notons que la majoration de l'indication est en fait les deux premiers termes de la série entière de $\log(1+x)$, il suffit de vérifier que le reste est négatif pour $x \in (-1, 0]$.

5. En notant, $g(x) = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2(1+x)}$, on trouve $g'(x) = \frac{-x}{2(1+x)}$. Ainsi, g' est négative sur $\mathbb{R}_+$ et donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Cela induit l'inégalité $\log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2(1+x)}$ pour tout $x \geq 0$. Par raisonnement similaire à précédemment, on obtient une domination $u \to \exp(-(u^2/2)(1+u/t)^{-1})$. A $u \geq 0$ fixé, cette quantité est monotone décroissante en t. Si $t_n \to \infty$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $t_n > 1$. Pour tout $n \geq N$, on a donc la minoration

$$\frac{u^2}{2}\frac{1}{1+u/t_n} \geq \frac{u^2}{2}\frac{1}{1+u},$$

et on peut utiliser la domination $u \to e^{-u^2/(2(1+u))}$ qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée permet de conclure.

6. Conclure.

Exercice 4 *Fonction Beta d'Euler*

1. On pose $(u,v) = \phi(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et calulons ϕ^{-1} en résolvant le système

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

Ainsi, $\phi^{-1}(u,v) = (uv, u(1-v))$. Il est clair que ϕ est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. De plus, $\phi^{-1} : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est également C^1. Aussi ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

2. On a
   - $\phi(]-\infty,-1]^2) =$,
   - $\phi(]0,\infty[^2) =]0,\infty[\times]0,1[$,
   - $\phi(]0,1]^2) =]0,1]^2 \cup D$ où D est le domaine délimité par la droite d'équation $x = 1$, les courbes d'équation $y = 1/x$ et $y = 1 - 1/x$ avec $x \in [1,2]$.

3. La fonction f est Riemann intégrable sur l'intervalle $[0,1]$ donc Lebesgue intégrable.

4. On effectue le changement de variable $(x,y) = \phi^{-1}(u,v)$ qui est un C^1-difféomorphime de $]0,\infty[\times]0,1[$ dans $]0,\infty[^2$. La jacobienne de ϕ^{-1} est

$$D\phi^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}$$

On obtient $\mathsf{det}\ (D\phi^{-1}(u,v) = -u$. D'où, par la formule du changement de variables

$$\int_{]0,\infty[^2} e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}\ dxdy = \int_0^\infty \int_0^1 e^{-u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\ dudv = \nu(\mathbb{R})\Gamma(a+b).$$

D'un autre côté, par le théorème de Tonelli, on a

$$\nu(\mathbb{R})\Gamma(a+b) = \Gamma(a)\Gamma(b).$$

La constante $Beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ est une constante remarquable intervenant dans la définition de la loi Beta.

Exercice 5 *Fonction Beta d'Euler, suite*

1. On fait le changement de variables

$$(X,Y,Z) = \phi(x,y,z) = \left(x+y+z, \frac{y+z}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right)$$

qui s'inverse en

$$(x,y,z) = \phi^{-1}(X,Y,Z) = (X(1-Y), X(Y-Z), XZ) \in D.$$

Ainsi, ϕ est un C^1-difféomorphisme de D sur $\phi(D) =]0,1[\times\{(Y,Z) \in \mathbb{R}_+^2 : Z < Y < 1\} =]0,1[\times\Delta$.

On calcule la jacobienne de ϕ^{-1}, on trouve

$$D\phi^{-1}(X,Y,Z) = \begin{pmatrix} 1-Y & -X & 0 \\ Y-Z & X & -X \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |D\phi^{-1}(X,Y,Z)| = X^2.$$

La formule du changement de variables donne

$$\begin{aligned} J &= \int_{]0,1[\times\Delta} X^{p+q+r-3}(1-Y)^{p-1}(Y-Z)^{q-1}Z^{r-1}(1-X)^{s-1}X^2 \, dXdYdZ \\ &= \int_0^1 X^{p+q+r-1}(1-X)^{s-1} \, dX \int_\Delta (1-Y)^{p-1}(Y-Z)^{q-1}Z^{r-1} \, dYdZ \\ &= B(p+q+r,s) \int_\Delta (1-Y)^{p-1}(Y-Z)^{q-1}Z^{r-1} \, dYdZ. \end{aligned}$$

En dessinant le domaine Δ dans le plan (Y,Z), on peut intégrer par tranche horizontales et on obtient

$$\int_0^1 \int_Z^1 (1-Y)^{p-1}(Y-Z)^{q-1}Z^{r-1} \, dYdZ = \int_0^1 \int_Z^{1-Z} (1-Y)^{p-1}(Y-Z)^{q-1}Z^{r-1} \, dZdY$$

Il reste à faire le changement variable unidimensionnel $Z = Yw$ et appliquer Tonelli

$$\int_0^1 Z^{r-1} \int_Z^{1-Z} (1-Y)^{p-1}(Y-Z)^{q-1} \, dZdY = \int_0^1 \int_0^1 (1-Y)^{p-1}Y^{p+q-1}(1-w)^{q-1}w^{r-1} \, dwdY = B(q+r,p)B(r,q).$$

Ainsi $J = B(p+q+r,s)B(q+r,p)B(r,q)$.

Exercice 6 *Calcul d'intégrales multiples*

1. On fait le changement de variables $u = x-y$ et $v = x+y$ alors,

$$\int_D \exp\frac{x-y}{x+y} \, dxdy = \int_\Delta e^{-u/v} \, dudv/2,$$

où Δ est le trapèze d'extrêmités $(1/2,1/2),(-1/2,1/2),(-1,1),(1,1)$. Une paramétrisation de Δ est donnée par

$$\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 < v < 1, -v < u < v\}.$$

Ainsi,

$$\int_\Delta e^{-u/v} \, dudv/2 = \frac{1}{2}\int_{1/2}^1 \int_{-v}^v e^{-u/v} \, dudv = \int_{1/2}^1 v\sinh(1) \, dv = 3\sinh(1)/8.$$

2. On pose $T(x,y) = (x^2+2y^2, y/x)$ alors

$$T^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u}{1+2v^2}}, \sqrt{\frac{uv^2}{1+2v^2}}\right)$$

Pour inverser, on a juste supposer que $x > 0$, c'est compatible avec le domaine D, donc T est bijective de D dans D'. Clairement, T et T^{-1} sont des C^1-difféomorphismes sur leurs domaines. On a de plus

$$DT^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u(1+2v^2)}} & -2v\sqrt{u}(1+2v^2)^{-3/2} \\ \frac{1}{2\sqrt{u}}\sqrt{\frac{v^2}{1+2v^2}} & \sqrt{u}(1+2v^2)^{-3/2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\det DT^{-1}(u,v)| = (1+2v^2)^{-3}.$$

Le changement de variables donne

$$\int_D \frac{x^2-y^2}{x^2} \, dxdy = \int_{D'} \frac{1-v^2}{(1+2v^2)^3} \, dudv = \int_0^1 \frac{1-v^2}{(1+2v^2)^3} \, dv.$$

3. On fait le changement de variable $x = a\rho\cos(\theta)$, $y = b\rho\sin(\theta)$ qui est un C^1-difféomorphisme de $]0,1]\times[0,2\pi[$ dans D^*. On a

$$D\phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) & -a\rho\sin(\theta) \\ b\sin(\theta) & b\rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\det D\phi(\rho,\theta)| = ab\rho.$$

La formule du changement de variables donne

$$\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^{-1/2} ab\rho \, d\rho d\theta = ab\pi.$$

Exercice 7

Comme A est symétrique définie positive, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \mathsf{diag}\ (\alpha_1^2, \dots, \alpha_m^2)$ inversible tel que $A = P^*DP$ et en faisant le changement de variable $u = Px$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp -\langle Ax, x\rangle\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \exp -\langle Du, u\rangle\ du = \prod_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha_i^2 u_i^2}\ du = \sqrt{\frac{\pi^m}{\mathsf{det}\ D}} = \sqrt{\frac{\pi^m}{\mathsf{det}\ A}}.$$

Pour la deuxième intégrable, on fait le même changement de variables $u = Px$ et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^m} \langle Bx, x\rangle \exp -\langle Ax, x\rangle\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \langle PBP^*u, u\rangle \exp -\langle Du, u\rangle\ du.$$

L'application $u \to \langle PBP^*u, u\rangle$ est une forme quadratique en les u_i, $i = 1, \dots, m$. Il est facile de voir par symétrie que les intégrales correspondant aux termes croisés u_iu_j, $i \neq j$, sont nulles à l'aide d'un argument de parité. Il reste donc à calculer pour tout $i = 1, \dots, m$ l'intégrale des termes carrés u_i^2 et plus pécisément

$$\int_{\mathbb{R}} u_i^2 e^{-\alpha_i^2 u_i^2}\ du_i.$$

La trace de BA^{-1} apparaît alors naturellement.

Exercice 8

1. Calculons ϕ^{-1} :

$$\left\{\begin{array}{l} u = x + y \\ v = xy \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = u - y \\ y^2 - uy + v = 0 \end{array}\right.$$

   On a $\Delta = u^2 - 4v > 0$ dans V. Et donc $y = (u \pm \sqrt{u^2 - 4v})/2$. Pour choisir le signe dans l'expression de y on utilise la contrainte $x < y$ qui impose

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{u - \sqrt{u^2-4v}}{2} \\ y = \frac{u + \sqrt{u^2-4v}}{2} \end{array}\right.$$

   Les applications ϕ et ϕ^1 sont clairement C^1 sur U et V respectivement.

2. L'ensemble Δ est le domaine relativement compact compris entre les droites $D_1 : y = x$, $D_2 : y = 4 - x$ et la courbe C de l'hyperbole $x \to 1/x$. La fonction est continue sur $\overline{\Delta}$ compact donc intégrable. Probablement une astuce pour le calcul de l'intégrale.

Exercice 9 *Volume d'une boule*

1. Pour V_2, on fait le changement de variable $x_1 = r\cos(t), x_2 = r\sin(t)$,

$$V_1 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \quad \text{et} \quad \int_{B_2} d\lambda_2 = \pi.$$

2. On définit l'application ϕ pour $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $y_1^1 + y_2^2 \leq 1$ par

$$\phi(y_1, \dots, y_n) = (y_1, y_2, \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}y_3, \dots, \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2}y_n).$$

   On remarque qu'en faisant le changement de variables $x = \phi(y)$, on obtient

$$\mathbf{1}_{B_n}(x) = \mathbf{1}_{B_n}(\phi(y)) = \mathbf{1}_{B_{n-2}}(y_3, \dots, y_n)\mathbf{1}_{B_2}(y_1, y_2) = \mathbf{1}_{B_2 \times B_{n-2}}(y).$$

   C'est à dire que ϕ est une application bijective $\mathcal{C}^1$ de $B_{n-2} \times B_2$ dans B_n d'inverse $\mathcal{C}^1$. On applique la formule du changement de variables. On calcule

$$D\phi(y) = \begin{pmatrix} Id_2 & 0 \\ M & \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \end{pmatrix},$$

   et M est une matrice de taille $n - 2 \times 2$. La jacobienne est diagonale par bloc, on peut calculer le déterminant par bloc et on obtient

$$|\mathsf{det}\ D\phi(y)| = (1 - y_1^2 - y_2^2)^{\frac{n-2}{2}}.$$

   Finalement, par changement de variables et Fubini

$$V_n = V_n \int_{B_2} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{(n-2)/2}\ dx_1dx_2.$$

3. On fait le changement de variables $x_1 = r\cos(t)$, $x_2 = r\sin(t)$, on a

$$\int_{B_2} (1-x_1^2-x_2^2)^{(n-2)/2}\ dx_1 dx_2 = \pi \int_0^1 (1-r^2)^{(n-2)/2} 2r\ dr = 2\pi/n.$$

4. Faire une récurrence.
5. C'est le changement de variable $y \to ry$.

Exercice 10 *Effet régulariant de la convolution*

Voir correction du TD 5.

Exercice 11 *Approximation de l'identité*

Il y a trois points à vérifier :

1. On fait le changement de variable $y = nx$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^d} n^d \phi(nx)\ dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)\ dy = 1.$$

2. À l'aide du même changement de variables, on vérifie que

$$\sup_{n\geq 1} \int |\phi_n|\ d\lambda_d = \int |\phi|\ d\lambda_d < \infty.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$, par le même changement de variable

$$\int_{\|x\|>\varepsilon} n^d \phi(nx)\ dx = \int_{\|y\|>n\varepsilon} \phi\ d\lambda_d,$$

qui tend vers 0 en l'infini car $\phi \in \mathbf{L}^1$.

Exercice 12 *Transformée de Fourier, transformée inverse*

1. Il est immédiat que

$$\alpha_n(t) = \hat{a}_n(t) = (2\pi)^{-d} \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} \exp - \left(\frac{1}{n}|x_j| + it_j x_j\right)\ dx_j.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{n}|x|+itx}\ dx = \int_{-\infty}^0 e^{\frac{x}{n}+itx}\ dx + \int_0^\infty e^{-\frac{x}{n}+itx}\ dx = \frac{1}{\frac{1}{n}+it} - \frac{1}{-\frac{1}{n}+it} = \frac{\frac{1}{n}-it}{\frac{1}{n^2}+t^2} + \frac{\frac{1}{n}+it}{\frac{1}{n^2}+t^2} = \frac{2n}{1+n^2t^2},$$

d'où

$$\alpha_n(t) = \prod_{j=1}^d \frac{n^d}{\pi(1+n^2t_j^2)}.$$

Pour vérifier que α_n est une approximation de l'unité, il faut vérifier les trois points de la définition :

— à l'aide du changement de variables $s = nIt$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \frac{n^d}{\pi(1+n^2t_j^2)}\ dt_j = \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi(1+s_j^2)}\ ds_j = 1.$$

— Remarquons α_n est positive donc $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable en faisant le changement de variable ci-dessus.

— Soit $\varepsilon > 0$ alors par le même changement de variable

$$\int_{\|x\|\geq\varepsilon} \alpha_n(t)\ dt = \prod_{j=1}^n \int_{|x_j|\geq n\varepsilon} \frac{1}{\pi(1+t_j^2)}\ dt_j \to 0.$$

2. Par définition, en utilisant l'intégrabilité de f et $\hat{f}$, Fubini implique

$$\alpha_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(t-x) f(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} a_n(\xi) e^{i\langle t-x,\xi\rangle}\ d\xi\ f(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}^d} a_n(\xi)\hat{f}(\xi) e^{-i\langle \xi,x\rangle}\ d\xi.$$

3. Lorsque $n \to \infty$, la quantité à gauche tend vers f dans $\mathbf{L}^1$ puisque α_n est une approximation de l'identité alors qu'à droite, par convergence dominée, cela tend vers

$$(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi = (2\pi)^{-d} \hat{\hat{f}}(-x).$$

4. Un calcul très similaire à ceux de la question 1 implique que la transformée de Fourier de f est $x \to \frac{2a}{(a^2+t^2)}$. Ces deux fonctions sont intégrables donc

$$2\pi e^{-a|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{2a}{(a^2+t^2)} e^{-itx}\, dt \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-|x|} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{\pi(1+t^2)}\, dt,$$

en faisant le changement de variables $s = -t$ dans l'intégrale puis en posant $a = 1$.

Exercice 13 *Densité des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$*

1. C'est la composée de 3 fonctions C^∞, elle est donc C^∞. Comme ϕ est à support compact, il en va de même pour toute ses dérivées (les dérivées successives de ϕ sur $\{\|x\|_2 > 1\}$ sont clairement nulles).
2. C'est l'exercice précédant.
3. Une fonction continue à support compact est Lebesgue intégrable car la mesure de Lebesgue affecte une mesure finie aux compacts.
4. Comme ϕ_n est une suite d'approximation de l'identité $\|\phi_n * f - f\|_1 \to 0$. De plus $\phi_n * f$ est C^∞ à support compact.
5. Ces espaces contiennent l'espaces des fonctions C^∞ à support compact, il sont donc denses pour la norme $\mathbf{L}^1$.