TD1 : Rappels et compléments d'analyse

Exercice 1

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Si $A : E \to F$ est une application linéaire continue, on définit

$$\|A\|_{E\to F} := \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_{E,F}$ est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ des applications linéaires continues de E dans F. Cette norme est appelée *norme subordonnée.*
2. Montrer pour tout $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$

$$\|A\|_{E\to F} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}:\|x\|_E\leq 1} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E:\|x\|_E=1} \|Ax\|_F.$$

3. Soient $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F,G)$, montrer que $\|BA\|_{E\to G} \leq \|B\|_{F\to G}\|A\|_{E\to F}$.

Exercice 2

Soit F l'ensemble des fonctions lipshitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application N pour tout $f \in F$ par

$$f \to N(f) = |f(0)| + \sup_{0\leq x<y\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

Montrer que N est une norme.

Exercice 3

Soit $C^1([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continument dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application N définie pour $f \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ par

$$f \to N(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

Qu'en est-il de $\tilde{N}$ définie par $\tilde{N}(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$. L'application $\tilde{N}$ définit-elle une norme sur $C := \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$?

Exercice 4

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Pour $(x,y) \in E\times E$, on définit $d(x,y) = \|x-y\|$. Montrer que (E,d) est un espace métrique.

Exercice 5

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on définit $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y\,|$. Montrer que $(\mathbb{R},d)$ est un espace métrique borné.

Exercice 6

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$, on définit

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si } 0, x \text{ et } y \text{ sont alignés,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $(\mathbb{R}^2,d)$ est un espace métrique. Dessiner la boule unité fermée centrée en x lorsque $\|x\|_2 < 1$, $\|x\|_2 = 1$ et $\|x\|_2 > 1$. Pourquoi d ne peut-elle pas être issue d'une norme ?

Exercice 7

Soit E un ensemble. Pour tout $(x,y) \in E\times E$, on définit

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que (E,d) est un espace métrique.
On suppose désormais que $E = \{0,1\}$, déterminer la boule ouvert $B(0,1)$, la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ et l'adhérence de la boule ouverte $\overline{B(0,1)}$. Commenter.

Exercice 8

Soit (E, d) un espace métrique et soient A, B deux parties non vides de E. Montrer que l'application $E \ni x \to d(x, A) \in \mathbb{R}$ est 1-Lipschitzienne. En déduire que $\{x \in E : d(x, A) = d(x, B)\}$ est un fermé de E.

Exercice 9

Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit $A \subset X$ un ouvert. Montrer que pour tout $B \subset X$, $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
2. Soient $U, V \subset X$ deux ouverts tels que $U \cap V = \emptyset$ alors $\mathsf{Int}\ \overline{U} \cap \mathsf{Int}\ \overline{V} = \emptyset$.

Exercice 10

Soit $(\mathbb{X}, d)$ un espace métrique. Montrer que $A \subset \mathbb{X}$ est ouvert si et seulement il est réunion de boule ouverte.

Exercice 11 *Caractérisation séquentielle de la continuité*

Soient $(\mathbb{X}, d)$ et $(\mathbb{X}', d')$ deux espaces métriques. Une fonction $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}'$ est continue en $a \in \mathbb{X}$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergente vers a, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers $f(a)$.

Exercice 12 *Lemme de Cesàro*

Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$.

1. On pose, pour tout $n \geq 1$, $y_n = (x_1 + \cdots + x_n)/n$. Montrer que $(y_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ.
2. Si $(c_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n\geq 1} c_n = \infty$, montrer que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$, définie pour $n \geq 1$ par $z_n = \frac{c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n}{c_1 + \cdots + c_n}$, converge vers ℓ.

Exercice 13 *Lemme de Stolz-Cesàro*

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels et $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si les séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont convergentes alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{\sum_{k=n}^{\infty} b_k} = \ell.$$
2. Montrer que si $\sum_n b_n$ est divergente alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k}{\sum_{k=0}^{n} b_k} = \ell.$$

Exercice 14 *Lemme de Kronecker*

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que $\sum_n a_n < \infty$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante non bornée de réels positifs. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} b_k a_k}{b_n} = 0.$$

Exercice 15

Soit l'espace vectoriel $C([0, 1], \mathbb{C})$ normé par $\|\cdot\|_\infty$. Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ de norme 1 tel que $\|f_n - f_m\|_\infty \geq 1$ dès que $m \neq n$. Commenter. *(On pourra considérer $f_n(\cdot) = \exp(2in\pi\cdot)$.)*

Exercice 16

Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach pour

1. E de dimension finie muni d'une norme quelconque ;
2. $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$;
3. $E = \ell^p(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$;
4. $E = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, où F est un espace de Banach, muni de la norme subordonnée $\|\cdot\|_{E\to F}$.

Exercice 17

Soit $\ell^\infty(\mathbb{N}) := \left\{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\geq 0} |x_n| < \infty\right\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout $x \in \ell^\infty$ par $\|x\| = \sup_{n\geq 0} |x_n|$. On rappelle que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est un espace de Banach.
On note C le sous-ensemble de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites convergentes. On note également $c_0(\mathbb{N})$ le sous-ensemble de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites qui convergent vers 0.

1. Montrer que C est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. En déduire que $(C, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Soit L l'application définie sur C qui à $x \in C$ associe sa limite. Montrer que L est une forme linéaire continue sur C. Calculer sa norme.
3. En déduire que $c_0(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel fermé dans C. Est-il fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$?
4. On définit l'application T de C dans $c_0(\mathbb{N})$ associant à la suite $x = (x_n)_{n\geq 0} \in C$ la suite $y = (y_n)_{n\geq 0}$ définie par $y_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $y_n = x_{n-1} - \lim_{k\to\infty} x_k$ pour $n \geq 1$.
   (a) Montrer que T est linéaire continue et calculer $\|T\|_\infty$.
   (b) Montrer que T est bijective.
   (c) Montrer que pour tout $x \in C$, $\|Tx\|_\infty \geq \frac{1}{2}\|x\|_\infty$.
   (d) En déduire que C et $c_0(\mathbb{N})$ sont isomorphes.
   (e) Montrer que $c_0(\mathbb{N})$ est de codimension finie dans C.

Exercice 18 *Théorème de point fixe*

1. Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application. On suppose qu'une des itérées $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ est contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Soit $k \in C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R})$ avec $\|k\|_\infty = M$. On définit $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ pour tout $u \in C([0,1])$ et $x \in [0,1]$ par
$$(Ku)(x) = \int_0^x k(x,y)u(y)\, dy.$$
   (a) Montrer que K est une application linéaire de $C([0,1])$ dans lui-même.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'application itérée K^n satisfait
$$|K^n u(x)| \leq M^n \|u\|_\infty \frac{x^n}{n!}, \quad \forall u \in C([0,1]), x \in [0,1].$$
   (c) Montrer que pour toute fonction $b \in C([0,1])$, il existe une unique solution $u \in C([0,1])$ à l'équation intégrale
$$u(x) + \int_0^x k(x,y)u(y)\, dy = b(x).$$
   (On pourra considérer l'application $Tu = b - Ku$.)

TD2 : Tribus, applications mesurables, mesures

Exercice 1

Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que
$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i), \quad A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i).$$
2. Montrer que
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\complement}, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}.$$
3. Soient F un ensemble, $f : E \to F$ une application. Montrer que
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$
Montrer que l'inclusion est stricte en générale. Montrer que si f est injective, la deuxième inclusion est une égalité. Montrer que $f(A)^{\complement}$ et $f(A^{\complement})$ ne sont en général pas comparables.
4. Soient $C \in \mathcal{P}(F)$ et $(C_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(F)$. Montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(C_i), \quad f^{-1}(C^{\complement}) = f^{-1}(C)^{\complement}.$$

Exercice 2 *Réunion et intersection dénombrables*

1. Déterminer les ensembles suivants :
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0, 1-\frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0, \frac{1}{n}\right[, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[, \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[k-\frac{1}{n+1}, k+\frac{1}{n}\right[.$$
2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$. Interpréter l'ensemble suivant :
$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i\geq k}\left\{x\in E, |f_i(x)-f(x)| \leq \frac{1}{n}\right\}.$$

Exercice 3 *Ensemble de convergence*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'ensemble
$$A = \{x \in \mathbb{X} : (f_n(x))_{n\geq 0} \text{ est convergente}\}$$
est un élément de $\mathcal{X}$. *(On pourra utiliser la complétude de $\mathbb{C}$.)*

Exercice 4 *Points de discontinuité d'une fonction croissante*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que f admet des limites à gauche $\lim_{y\to x^-} f(y)$ et à droite $\lim_{y\to x^+} f(y)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

(On pourra considérer, pour $n \geq 1$, les ensembles $A_n = \left\{x \in [-n, n] : \lim_{y\to x^+} f(y) - \lim_{y\to x^-} f(y) \geq \frac{1}{n}\right\}$.)

Exercice 5

Donner un exemple de suite décroissantes d'ensembles $(A_n)_{n\geq 0}$ tel que pour tout $n \geq 0$, A_n est de cardinal infini et $\cap_{n\geq 0} A_n = \emptyset$.

Exercice 6 *Fonction indicatrice*

Soient E un ensemble, A, B des parties de E et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de partie de E.

1. Déterminer $\mathbf{1}_\emptyset$, $\mathbf{1}_E$ et calculer $\mathbf{1}_A^{-1}(J)$ pour tout $J \subset \mathbb{R}$.
2. Montrer que
   (a) $A \subset B$ si et et seulement si $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$ et $A = B$ si et seulement si $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$;
   (b) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A^\complement} = 1 - \mathbf{1}_A$;
   (c) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$;
   (d) $\mathbf{1}_{A\Delta B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|$.
3. Montrer que $\mathbf{1}_{\cup_{i\in I} A_i} = \sup_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}$ et $\mathbf{1}_{\cap_{i\in I} A_i} = \inf_{i\in I} \mathbf{1}_{A_i}$.

Exercice 7 *Exemple de tribus*

Si $A \subset \mathbb{R}$, on note $-A$ l'ensemble $\{-a : a \in A\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la tribu image réciproque est $\mathcal{A}$.
3. Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ et les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Exercice 8 *Tribu induite*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable et $B \subset \mathbb{X}$. Montrer que la tribu induite $\mathcal{X}_B = \{B \cap A : A \in \mathcal{X}\}$ est une tribu sur B rendant l'injection canonique mesurable.

Exercice 9 *Tribu produit engendrée*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ et $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ deux espaces mesurables. On suppose que $\mathcal{X}$ (*resp.* $\mathcal{Y}$) est engendrée par $\mathcal{E}$ (*resp.* $\mathcal{F}$). On suppose de plus que $\mathbb{X} \in \mathcal{E}$ et $\mathbb{Y} \in \mathcal{F}$. Montrer que la tribu produit $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ sur $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ est engendrée par les ensembles qui s'écrivent $A \times B$ avec $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$.

Exercice 10

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable et f, g des applications mesurables de $\mathbb{X}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ muni de la tribu borélienne. On souhaite montrer que les ensembles suivants sont des éléments de $\mathcal{X}$:

$$A = \{x \in \mathbb{X} : f(x) < g(x)\}, \quad B = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \leq g(x)\}, \quad C = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = g(x)\}.$$

1. Montrer que A s'écrit encore $A = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{X} : f(x) < q < g(x)\}$. En déduire que $A \in \mathcal{X}$.
2. En déduire que $B, C \in \mathcal{X}$.

Exercice 11 *Algèbre des fonctions étagées*

Montrer que l'ensemble des fonctions étagées d'un espace mesurable $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ dans $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ est une algèbre.

Exercice 12 *Fonctions continues par morceaux*

Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux est mesurable.

Exercice 13

Soit μ une mesure de probabilité sur un espace mesurable $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$. Montrer que $\mathcal{Y} = \{A \in \mathcal{X} : \mu(A)(1 - \mu(A)) = 0\}$ est une tribu sur $\mathbb{X}$.

Exercice 14 *Définition équivalente d'une mesure*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable. Montrer qu'une application $\mu : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est une mesure si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. pour tout $A, B \in \mathcal{X}$ disjoints, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$;
3. pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$: $\mu(\cup_{n\geq 0} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Exercice 15 *Mesure de comptage*

Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et μ une application définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ par

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathsf{card}\ A & \text{si } A \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $(\mathbb{X}, \mathcal{P}(\mathbb{X}), \mu)$ est un espace mesuré. La mesure μ est appelée mesure de comptage sur $\mathbb{X}$.

Exercice 16 *Combinaison linéaire de mesures*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable, $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels positifs et $(\mu_k)_{k\geq 0}$ une suite de mesures positives sur $\mathcal{X}$.

1. Montrer que $\nu = \sum_{k\geq 0} \alpha_k \mu_k$ est une mesure positive sur $\mathcal{X}$.
2. Si on suppose de plus que, pour tout $k \geq 0$, μ_k est une mesure de probabilité, à quelle condition a-t-on que ν est une probabilité ? Donner une interprétation géométrique de ce résultat (notamment dans le cas où la somme est finie).

Exercice 17 *Supremum et infimum de mesures*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ un espace mesurable et $(\mu_k)_{k\geq 0}$ une suite de mesures sur $\mathcal{X}$. On suppose que, pour tout $A \in \mathcal{X}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\mu_k(A) \leq \mu_{k+1}(A)$.

1. Pour tout $A \in \mathcal{X}$, on pose $\mu(A) = \sup_{k\geq 0} \mu_k(A)$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{X}$.
2. On considère l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N}$, on définit

$$\nu_j(A) = \begin{cases} \mathsf{card}\ (A \cap [j, \infty)) & \text{si } A \cap [j, \infty) \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer, pour tout $j \in \mathbb{N}$, que ν_j est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que, pour tout $A \subset \mathbb{N}$, $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$. On pose $\nu(A) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \nu_j(A)$ pour tout $A \subset \mathbb{N}$. Calculer $\nu(\mathbb{N})$ et $\nu(\{k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire que ν n'est pas une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 18 *Mesure géométrique*

Soit $\rho \in (0, 1)$. Montrer que l'application $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\mu(A) = \sum_{i\in A\cap\mathbb{N}^*} \rho(1-\rho)^{i-1}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ appelée mesure géométrique de paramètre ρ. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mu(\{1, \ldots, n\})$ et $\mu(\{n, n+1, \ldots\})$. Quels sont les ensembles de mesures nulle ?

Exercice 19 *Mesure de Lebesgue*

Soit B une partie de $\mathbb{R}$ et a un réel. On note $a + B$ l'ensemble $a + B = \{a + b : b \in B\}$. Soit μ une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu([0, 1]) = 1$ et, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(a + B) = \mu(B)$. On dit que μ est invariante par translation.

1. Soit $\alpha = \mu(\{0\})$. Montrer que $n\alpha = \mu(\{1/k : 1 \leq k \leq n\}) \leq 1$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$.
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu((0, 1/n]) = 1/n$, puis que pour tout $k_1 \leq k_2$ des entiers naturels,

$$\mu\left(\left(\frac{k_1}{n}, \frac{k_2}{n}\right]\right) = \frac{k_2 - k_1}{n}.$$

   En déduire que pour tout rationnel $q < r$, $\mu((q, r]) = r - q$, puis que pour tout réels $a < b$, $\mu((a, b)) = b - a$.
3. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, que vaut $\mu(I)$? Que peut-on conclure de ces calculs ?

TD3 : Intégrale

Exercice 1 *Quelques calculs d'intégrales contre des mesures discrètes*

Calculer $\int x \ \mu(dx)$ et $\int x^2 \ \mu(dx)$ pour les mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ suivantes :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \mu_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \quad p \in (0,1), \quad \mu_3 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k.$$

Que dire si l'on considère ces mesures comme des mesures sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

Exercice 2 *Entropie*

Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ On définit l'entropie relative de ν par rapport à μ par

$$H(\nu|\mu) = \begin{cases} \int f \log f \ d\mu & \text{si } \nu \text{ est à densité } f \text{ par rapport à } \mu, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Soient μ et ν deux mesures de Poisson sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de paramètres respectifs 1 et α. Montrer que ν admet pour densité par rapport à μ la fonction $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f_\alpha(k) = e^{1-\alpha}\alpha^k.$$

   Calculer $H(\nu|\mu)$. En déduire que $H(\mu|\nu)$ est positif et ne s'annule que si $\alpha = 1$.
2. Avec les notations de l'exercice 1, calculer $H(\mu_1|\mu_2)$, $H(\mu_1|\mu_3)$ et $H(\mu_3|\mu_1)$.

Exercice 3

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $f_n = \min(f, n)$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, f_n est mesurable et déterminer $\lim_{n\to\infty} \int f_n \ d\mu$.

Exercice 4 *Mesure image*

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ un espace mesurable et $\phi : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une application mesurable. Pour tout $B \in \mathcal{Y}$, on pose $\nu(B) = \mu(\phi^{-1}(B)) = \phi_*\mu(B)$.

1. Montrer que ν est une mesure.
2. Application : $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Y} = \mathbb{N}$, μ est la mesure de Lebesgue et ϕ la fonction partie entière. Déterminer ν.
3. Soit $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que f est ν-intégrable si et seulement si $f \circ \phi$ est μ-intégrable et dans ce cas $\int f \ d\nu = \int f \circ \phi \ d\mu$. *(On adoptera un raisonnement en trois étapes : on montre l'égalité pour les fonctions étagées positives, puis pour les fonctions mesurables positives puis pour les fonctions intégrables.)*

Exercice 5 *Convergence monotone décroissante*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives.

1. On suppose que $\int f_0 \ d\mu < \infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \ d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \ d\mu.$$

2. Montrer que ce résultat n'est en général pas exact si on ne suppose pas $\int f_0 \ d\mu < \infty$.
3. Quel résultat retrouve-t-on si l'on choisit $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$, $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ décroissante ?

Exercice 6

Calculer les quantités suivantes :

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^m} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}}.$$

Exercice 7 *Intervertion de limite et d'intégrale*

Soit μ la mesure définie par $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\delta_k$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$, pour $n \geq 1$, par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(x).$$

1. Pour tout $x \geq 0$, déterminer la limite de la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$.
2. On note g_n, $n \geq 0$, la fonction définie sur $[0, n)$ par $g_n(x) = \log f_{n+1}(x) - \log f_n(x)$. Montrer que g_n, $n \geq 0$, est positive. En déduire que $\{f_n\}_{n\geq 0}$ est une suite croissante.
3. Montrer que la suite $\left(\int f_n \, d\mu\right)_{n\geq 0}$ converge vers une limite à déterminer.

Exercice 8 *Un critère d'intégrabilité en mesure infinie*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}) < \infty.$$

Soient $\alpha > 0$ et $f_\alpha : x \to x^{-\alpha}\mathbf{1}_{x>1}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on que f_α est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue ?

Exercice 9 *Critère d'intégrabilité en mesure finie*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ une application mesurable.

1. Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} = [|f|]$, où $[\cdot]$ est la fonction partie entière.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty$.
3. On suppose que μ est finie. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty$ implique $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. L'hypothèse μ finie est-elle nécessaire ?

Exercice 10

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{X}$ tel que $\mu(A_\varepsilon) < \infty$, f est bornée sur A_ε et
$$\int_{\mathbb{X}\setminus A_\varepsilon} |f| \, d\mu < \varepsilon.$$
(On pourra considérer les ensembles $B_n = \{2^{-n} \leq |f| \leq 2^n\}$ et appliquer le théorème de convergence monotone aux fonctions $|f|\mathbf{1}_{B_n}$.)
2. En déduire que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{X}, \mu(A) < \eta \Longrightarrow \int_A |f| \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Exercice 11 *Théorème d'Egoroff*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ et une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions mesurables réelles.

1. Montrer que l'ensemble de convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ peut s'écrire
$$C = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{i,j\geq n} \left\{|f_i - f_j| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$
2. On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge μ-p.p. vers une fonction mesurable f au sens où $\mu(C^\complement) = 0$. On définit pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $A_n^k = \cup_{p=1}^n \cap_{i\geq p} \{|f_i - f| \leq 1/k\}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_{k,\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu((A_{n_{k,\varepsilon}})^\complement) < \varepsilon/2^k$.
3. En déduire le théorème d'Egoroff : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{X}$ tel que $\mu(A_\varepsilon^\complement) < \varepsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur A_ε.
4. L'hypothèse μ finie est-elle indispensable ?

TD4 : Intégration et théorèmes limites

Exercice 1 *Intégrabilité et comportement à l'infini*

Construire une application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+$,
2. $\int f \, d\lambda < \infty$,
3. pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\sup_{t \geq a} f(t) = \infty$.

Exercice 2 *Intégrabilité et convergence uniforme*

Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions mesurables positives sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ convergeant uniformément vers 0 et vérifiant l'une des propriétés suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n n'est pas intégrable,
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int f_n \, d\lambda = 1$,
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable et $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \infty$.

Exercice 3 *Intervertion limite-somme*

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$:

$$\text{(i) } u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+nk+1}\,; \qquad \text{(ii) } u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n^2}{kn^2+k^2}\,; \qquad \text{(iii) } u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n ; \qquad \text{(iv) } u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n+k}{nk^{3/2}+k^3}.$$

Exercice 4 *Intervertion limite-intégrale*

Dans chacun des exemples suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\text{(i) } u_n = \int_0^1 \frac{n}{1+x^2}\sin(x/n)\, dx\,; \qquad \text{(ii) } u_n = \int_0^\infty \frac{ne^{-x}}{nx+1}\, dx\,; \qquad \text{(iii) } u_n = \int_0^1 \frac{(\sin x)^n}{\sqrt{x}}\, dx\,;$$

$$\text{(iv) } u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{(\sin t)^n}{t(1+t)}\, \lambda(dt)\,; \qquad \text{(v) } u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\, dt\,; \qquad \text{(vi) } u_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\pi(1+|t|^{2+1/n})}\,;$$

$$\text{(vii) } u_n = \int_0^1 \left(1 - e^{-t^2/n}\right) dt\,; \qquad \text{(viii) } u_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{ne^{t^2}+1}{ne^{2t^2}+4t^2}\, dt\,; \qquad \text{(ix) } u_n = \int_0^n \frac{1}{n}\left(1+\frac{t}{n}\right) e^{-t/n}\, dt\,;$$

$$\text{(x) } u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin u}{u^2} \frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}}\, du\,; \qquad \text{(xi) } u_n = \int_0^\infty \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}}\, dx.$$

Exercice 5

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 0}$ une partition de $\mathbb{X}$. Montrer que pour toute fonction mesurable positive

$$\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{a[x]}\, \lambda(dx) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{[x]!}\, \lambda(dx),$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

Exercice 6 *Autour du théorème de convergence dominée*

On munit l'ensemble $[0,1]$ de la tribu boréliene et de la mesure de Lebesgue. Pour $n \geq 2$, on pose $f_n = \frac{n}{(\log n)^2}\mathbf{1}_{[0,1/n]}$. Montrer que

1. pour tout $n \geq 2$, la fonction f_n est intégrable,
2. que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ tend vers 0 presque partout et $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = 0$.

Déterminer la fonction $\sup_{n\geq 2} f_n$. Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont-elles vérifiées ? En modifiant l'exemple précédent, montrer que l'on peut trouver une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions qui ne satisfont pas les conditions d'application du théorème de convergence dominée mais vérifient les points 1 et 2 ci-dessus.

Exercice 7 *Autour du théorème de Fatou, théorème de Young*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $(f_n)_{n\geq 0}$, $(g_n)_{n\geq 0}$ et $(h_n)_{n\geq 0}$ trois suites de fonctions réelles intégrables par rapport à μ vérifiant

1. pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{X}$, $g_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x)$;
2. $(f_n)_{n\geq 0}$ (*resp.* $(g_n)_{n\geq 0}$, $(h_n)_{n\geq 0}$) convergent simplement vers f, (*resp.* vers g et h) ;
3. que h et g sont intégrables et $\lim_{n\to\infty} \int h_n \, d\mu = \int h \, d\mu$ et $\lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu = \int g \, d\mu$.

Montrer que f est intégrable et $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Exercice 8

Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable telle que $\int_A f \, d\mu = 0$ pour tout $A \in \mathcal{X}$. Montrer que f est nulle presque partout. *(On pourra commencer par supposer f à valeurs réelles.)*

Exercice 9

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$ et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer $\int_{\mathbb{R}_+} f(x) \, dx$ et $\sum_{n\geq 1} \int_{\mathbb{R}_+} f_n(x) \, dx$. Commenter.

Exercice 10

On se place sur l'espace de Borel standard $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{si } x \geq 2/n. \end{cases}$$

   Calculer $\liminf \int f_n \, d\lambda$, $\int \liminf f_n \, d\lambda$, $\limsup \int f_n \, d\lambda$ et $\int \limsup f_n \, d\lambda$.
2. Même question avec la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ telle que $g_{2p} = \mathbf{1}_{[0,1/(2p)]}$ et $g_{2p-1} = \mathbf{1}_{[1/(2p-1),1]}$, $p \geq 1$.
3. Commenter.

Exercice 11 *Critère d'intégrabilité*

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $x \to \exp(-c\sqrt{x})$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \infty[$.
2. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $x \to x^\alpha \exp(-c\sqrt{x})$ soit Lebesgue intégrable sur $[0, \infty[$. Même question sur $[1, \infty[$.
3. Déterminer l'ensemle des couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \to x^\alpha (\log x)^\beta$ est Lebesgue intégrable sur $]0, 1]$. Même question sur $[1, \infty[$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx} \, dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer f'' et les limites en ∞ de f et f'.
3. En déduire une expression de f. Que vaut $f(0)$? Justifier.

Exercice 13

1. Montrer que la fonction $f : x \to \frac{\sin x}{e^x - 1}$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \infty[$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, la quantité $f(x)$ peut encore s'écrire sous la forme $\sum_{n=1}^\infty e^{-nx} \sin(x)$. Est-ce vrai pour $x = 0$?
3. En déduire que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1} \, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 14

1. Montrer que $h : \theta \to \log(1 - \sin^2 \theta)$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \pi/2[$.
2. On considère la fonction $F : t \to \int_0^{\pi/2} \log(1 + t \sin^2 \theta) \, d\theta$.
   (a) Montrer que F est définie et continue sur $[-1, \infty[$.
   (b) Montrer que F est C^1 sur $]-1, \infty[$ et que

$$\forall t \in]-1, \infty[\quad F'(t) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{1 + t \sin^2 \theta} \, d\theta.$$

3. (a) Montrer que pour tout $t \in]-1,\infty[$, $F'(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t}(1+\sqrt{1+t})}$.
   (b) En déduire que pour tout $t \in]-1,\infty[$, $F(t) = \pi[\log(1+\sqrt{1+t}) - \log 2]$.

Exercice 15

Le but de cet exercice est de montrer que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi/2$.

1. (a) Montrer que l'intégrale impropre $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ est convergente.
   (b) La fonction $x \to \frac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Pour $t \geq 0$, on pose $S(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx$.
   (a) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,\infty[$. Calculer $S'(t)$ pour tout $t > 0$.
   (b) Déterminer la limite de S en ∞ puis $S(t)$ pour tout $t > 0$.
3. Soit $A > 0$ et $t > 0$. Montrer que
$$\left| \int_A^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx \right| \leq 2/A.$$
4. Montrer que pour tout $A > 0$,
$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^A e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx.$$
5. Conclure.

Exercice 16 *Transformée de Fourier*

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. La transformée de Fourier de f est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx}\, dx.$$

1. Pourquoi $\hat{f}$ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que si f est paire, alors $\hat{f}$ est à valeurs réelles.
3. Montrer que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose de plus que $x \to x^k f(x)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer la transformée de Fourier des donctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $f_2 = e^{-|x|}$.

Exercice 17 *Transformée de Fourier d'une probabilité*

Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que l'application $\phi_\mu : t \to \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, \mu(dx)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer ϕ_μ pour les probabilités suivantes

(a) $\mu_1 = \frac{\delta_0 + \delta_1}{2}$; (b) $\mu_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{-k} \delta_k$; (c) $\mu_3 = \sum_{k=0}^\infty e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k$, avec $\alpha > 0$.

TD5 : Mesure produit

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ par $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}([0,1])$-mesurable.
2. Calculer $\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\ dx \right)\ dy$ et $\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\ dy \right)\ dx$. Conclure.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne positive.

1. Montrer que l'ensemble $A_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x) \right\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ et calculer $\lambda_2(A_f)$.
2. Même question pour le graphe de f défini par $G_f = \left\{ (x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \right\}$.
3. En déduire que $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = 0$, $\lambda(dy)$-p.p..

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2-1}\ dx$ est bien définie et vaut également $I = -2\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\ dx$.
2. Calculer, en justifiant, de deux façons différentes l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$ et en déduire la valeur de I.
3. Déduire de la question précédante et d'un développement en série entière de $1/(1-x^2)$ les égalités

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 4

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soient f et g deux fonctions mesurables positives sur $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.

1. Montrer que $A = \{(x,t) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}_+ : f(x) \geq t\} \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
2. Montrer que $\int_{\mathbb{X}} f\ d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f \geq t\})\ \lambda(dt)$.
3. En déduire que pour tout $p \geq 1$, $\int_{\mathbb{X}} g^p\ d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1}\mu(\{g \geq t\})\ \lambda(dt)$.
4. Que dire de $\int_{\mathbb{X}} \phi \circ f\ d\mu$ si ϕ est croissante de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0.
5. En considérant l'application de $\mathbb{X} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, notée F, qui à (x,s,t) associe $\mathbf{1}_{[s,\infty[}(f(x))\mathbf{1}_{[t,\infty[}(g(x))$, montrer que

$$\int_{\mathbb{X}} fg\ d\mu = \int_{\mathbb{R}_+^2} \mu(\{f \geq s\} \cap \{g \geq t\})\ dsdt.$$

Exercice 5

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer, si elles existent, les intégrales itérées $\int_I \int_I f(x,y)\ dxdy$ et $\int_I \int_I f(x,y)\ dydx$.

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \text{ avec } I = [0,1] \quad \text{et} \quad f(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \text{ et } 0 < y - x \leq 1, \\ 2 & \text{si } x > 0 \text{ et } 1 < y - x \leq 2, \\ -1 & \text{si } x > 0 \text{ et } 2 < y - x \leq 3, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{avec } I = \mathbb{R}.$$

Exercice 6

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\ dx \quad \text{et} \quad g(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 e^{-tx}\ dx.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et g sur $\mathbb{R}_+$.

2. Calculer $f(t)$ pour tout $t > 0$ en partant de l'égalité $\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xy)\ dy$.
3. Calculer $g(t)$ pour tout $t > 0$ en partant de l'égalité $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x}\ dy$. En déduire $g(0)$.

Exercice 7 *Intégration par parties*

1. Soient μ et ν deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On désigne par F et G leurs fonctions de répartition respectives, c'est à dire
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \mu(]-\infty, x]) \quad \text{et} \quad G(x) = \nu(]-\infty, x]).$$
Pour des réels fixés a et b, avec $a < b$, on définit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < y \leq x \leq b\}$. En calculant de deux façons différentes $\mu \otimes \nu(A)$, montrer que
$$\int_{]a,b]} F(t^-)\nu(dt) + \int_{]a,b]} G(t)\mu(dt) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$
2. Soient f et g deux fonctions mesurables positives et λ-intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\ d\lambda \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} g\ d\lambda.$$
Montrer que F et G sont les fonctions de répartitions de deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. En déduire que
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \quad \int_{[a,b]} F(x)g(x)\ dx + \int_{[a,b]} f(x)G(x)\ dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$
3. Que se passe-t-il dans la question précédante si l'on remplace la mesure de Lebesgue λ par la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$?

Exercice 8 *Convolution*

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^d}(\lambda_d)$. On définit le produit de convolution de f avec g, noté $f * g$, sur $\mathbb{R}^d$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\ dt.$$

1. Montrer que $f * g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^d}$ et que $f * g = g * f$.
2. Calculer $f * g$ pour $f = g = \mathbf{1}_{[0,1]}$ (d=1). Commenter.
3. Montrer que si f est de classe C^k à support compact, alors il en va de même pour $f * g$.
4. Montrer que si f et g sont positives d'intégrale 1, il en va de même pour $f * g$.
5. Montrer que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$. *(On pourra supposer $d = 1$.)*

TD6 : Changement de variables et convolution

Exercice 1 *Normalisation de la gaussienne*

Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ par $f(x,y) = y\exp\left(-y^2(1+x^2)/2\right)$. Après avoir justifié que f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$, montrer en calculant de deux façons différentes $\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y)\,dxdy$ que

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 2

Calculer, en justifiant, les intégrales suivantes

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \sin(y)e^{-(x+y)}\,dxdy \quad \text{et} \quad \int_\Delta xy^2\,dxdy,$$

où Δ est le domaine intérieur au triangle ABC avec $A=(0,-1)$, $B=(1,3)$ et $C=(0,1)$.

Exercice 3 *Fonction Gamma d'Euler*

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx$.

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{\pi}$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1/2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer, en considérant le changement de variables $x = \phi(u) = t + u\sqrt{t}$ que
$$\Gamma(t+1) = t^t\sqrt{t}e^{-t}\int_{-\sqrt{t}}^\infty \left(1+\frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}}\,du.$$
3. En déduire que, pour toute suite de réels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers ∞,
$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{e}{t_n}\right)^{t_n}\frac{\Gamma(t_n+1)}{\sqrt{t_n}} \geq \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\,du = \sqrt{2\pi}.$$
4. Montrer que $\lim_{t\to\infty}\int_{-\sqrt{t}}^0 \left(1+\frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On pourra pour cela poser $u=-v$ et remarquer que pour tout $x \in]-1,0]$, $\log(1+x) \leq x - x^2/2$.
5. Montrer que $\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On pourra étudier les variations de la fonction suivante : $x \to \log(1+x) - x + x^2/(2(1+x))$.
6. Établir la formule de Stirling étendue : $\Gamma(t+1) \sim_{t\to\infty} \left(\frac{t}{e}\right)^t\sqrt{2\pi t}$.

Exercice 4 *Fonction Beta d'Euler*

Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$. Soit ϕ la fonction de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ par

$$\phi(x,y) = \left(x+y, \frac{x}{x+y}\right).$$

On fixe a, b deux réels strictement positifs.

1. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
2. Déterminer graphiquement $\phi(]-\infty,-1]^2)$, $\phi(]0,\infty[^2)$ et $\phi(]0,1]^2)$.
3. Montrer que la fonction $f : v \to v^{a-1}(1-v)^{b-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(v)$ est Lebesgue intégrable.
4. Soit ν la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité f. Montrer que
$$\int_{]0,\infty[^2} e^{-(x+y)}x^{a-1}y^{b-1}\,dxdy = \nu(\mathbb{R})\Gamma(a+b).$$
En déduire $\nu(\mathbb{R})$.

Exercice 5 *Fonction Beta d'Euler, suite*

On pose $B(a,b) = \int_{]0,1[} v^{a-1}(1-v)^{b-1}\, dv$ pour a, b des réels. Soient p, q, r et s des réels strictement positifs.

1. Calculer, en fonction de B, l'intégrale
$$J = \int_D x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}(1-x-y-z)^{s-1}\, dxdydz,$$
où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : x+y+z < 1\}$. On pourra utiliser le changement de variables
$$X = x+y+z, \quad Y = \frac{y+z}{x+y+z}, \quad Z = \frac{z}{x+y+z}.$$
2. Exprimer J en fonction de Γ. Qu'obtient-on lorsque p, q, r et r sont des entiers.

Exercice 6 *Calcul d'intégrales multiples*

1. Pour le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1/2 < x+y < 1\}$, calculer $\int_D \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\, dxdy$.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+2y^2 < 2, 0 < y < x\}$. Trouver un difféomorphisme T de D dans $D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2, 0 < v < 1\}$. Calculer $\int_D \frac{x^2-y^2}{x^2}\, dxdy$.
3. Calculer $\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ pour des réels non nuls a, b.

Exercice 7

Soient A une matrice réelle $m \times m$ symétrique définie positive et B une matrice de taille $m \times m$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp -\langle Ax, x\rangle\, dx = \sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^m} \langle Bx, x\rangle \exp -\langle Ax, x\rangle\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^m}{\det A}}\operatorname{trace}(BA^{-1}),$$
où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^m$.

Exercice 8

1. Montrer que l'application $\phi : (x,y) \to (x+y, xy)$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même est un C^1-difféomorphisme de
$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\} \quad \text{dans} \quad V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0, u^2 > 4v\}.$$
2. Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x+y < 4, xy > 1, x < y\}$. Calculer l'intégrale, après avoir justifié son existence, $\int_\Delta (x^2-y^2)\cos(xy)\, dxdy$.

Exercice 9 *Volume d'une boule*

On cherche à calculer le volume V_n de la boule euclidienne B_n de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, définie par
$$B_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$
On note λ_n la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ (donc $V_n = \lambda_n(B_n)$).

1. Calculer V_1 et V_2.
2. Soit $n \geq 3$, montrer que
$$V_n = V_{n-2}\int_{B_2} (1-x_1^2-x_2^2)^{(n-2)/2}\, d\lambda_2(x_1, x_2).$$
3. En déduire que $V_n = \frac{2\pi}{n}V_{n-2}$ et que $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.
4. Montrer que $\lambda_n(rB_n) = r^d V_n$ pour tout $r \geq 0$.

Exercice 10 *Effet régulariant de la convolution*

Calculer le produit de convolution $\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]}$. Commenter.

Exercice 11 *Approximation de l'identité*

Soit $\phi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int \phi\, d\lambda_d = 1$. Pour tout $n \geq 1$, on définit ϕ_n par $\phi_n(x) = n^d\phi(nx)$. Montrer que $(\phi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de l'approximation de l'identité.

Exercice 12 *Transformée de Fourier, transformée inverse*

Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$. On rappelle que la transformée de Fourier de f est définie par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\langle t,x\rangle}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}^d$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. On considère pour tout $n \geq 1$ la fonction a_n définie par

$$a_n(x) = (2\pi)^{-d} \exp\left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{d} |x_i| \right), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Calculer la fonction $\alpha_n = \hat{a}_n$ et montrer que c'est une approximation de l'unité.
2. Soit $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,
$$\alpha_n * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} a_n(t) \hat{f}(t) e^{-i\langle t,x\rangle}\, dt.$$
3. En déduire la formule d'inversion de Fourier
$$(2\pi)^d f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t) e^{-i\langle t,x\rangle}\, dt = \hat{\hat{f}}(-x), \quad \lambda_d - p.p.\ .$$
4. On pose $f(x) = e^{-a|x|}$ où $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Calculer $\hat{f}$ et en déduire la transformée de Fourier de $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 13 *Densité des fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$*

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est dite à support compact si il existe $K \subset \mathbb{R}^d$ compact tel que $f(x) = 0$ dès que $x \notin K$.
On définit $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{1}{1-\|x\|^2} \right] & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
2. Donner une suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ d'approximation de l'identité d'éléments de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
3. Justifier l'inclusion $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$.
4. Montrer que $\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_1} = \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^d)$.
5. Que peut-on dire à propos de $C_c^k(\mathbf{R}^d)$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables à support compact ?