Correction de l'examen du 20 décembre 2018 - 2h30

Exercice 1 *(5 points)*

1. Il est bien connu que la somme de gaussiennes indépendantes est gaussienne. Donc U_0 est variable aléatoire réelle gaussienne. Or sa moyenne est nulle et sa variance est égale à 1. Finalement, $U_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Soit $k \in \{1,\dots,n\}$, alors

$$V_k = U_k - \frac{X_k}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_{k-1} + G_{k+1} + \cdots + G_n) = U_{k-1} - \frac{G_k}{\sqrt{n}}.$$

3. (a) Par la question précédente, $U_k = V_k + \frac{X_k}{\sqrt{n}}$ et $U_{k-1} = V_k + \frac{G_k}{\sqrt{n}}$ si bien que deux développements de Taylor à l'ordre 3 au point V_k implique

$$\begin{aligned} f(U_k) - f(U_{k-1}) &= f(V_k + X_k/\sqrt{n}) - f(V_k + G_k/\sqrt{n}) \\ &= f(V_k) + f'(V_k)\frac{X_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}f''(V_k)\frac{X_k^2}{n} + \frac{1}{6}f^{(3)}(V_k)\frac{X_k^3}{n^{3/2}} \\ &\quad - \left[f(V_k) + f'(V_k)\frac{G_k}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}f''(V_k)\frac{G_k^2}{n} + \frac{1}{6}f^{(3)}(V_k)\frac{G_k^3}{n^{3/2}}\right] + o(|X_k|^3/n^{3/2}) + o(|G_k^3|/n^{3/2}). \end{aligned}$$

Lorsqu'on passe à l'espérance de chaque côté de l'égalité ci-dessus les trois premiers termes de chaque développement de Taylor s'annulent car X_k et G_k sont centrées, indépendantes de V_k et de même variance. De plus, comme $f^{(3)}$ est bornée, on obtient

$$\mathbf{E}\left|\frac{1}{6}f^{(3)}(V_k)\frac{X_k^3}{n^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{6}\|f^{(3)}\|_\infty \frac{\mathbf{E}[|X_1|^3]}{n^{3/2}} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\left|\frac{1}{6}f^{(3)}(V_k)\frac{G_k^3}{n^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{6}\|f^{(3)}\|_\infty \frac{\mathbf{E}[|G_1|^3]}{n^{3/2}}.$$

De même, la formule du développement de Taylor implique l'existence de $K \geq 0$ tel que

$$o(|X_k|^3 n^{-3/2}) + o(|G_k|^3 n^{-3/2}) \leq \frac{K}{n^{3/2}}(|X_k|^3 + |G_k|^3),$$

d'où en passant à l'espérance

$$\mathbf{E}(o(|X_k|^3 n^{-3/2}) + o(|G_k|^3 n^{-3/2})) \leq \frac{K}{n^{3/2}}\mathbf{E}(|X_1|^3 + |G_1|^3).$$

Par conséquent,

$$|\mathbf{E}[f(U_k)] - \mathbf{E}[f(U_{k-1})]| \leq \frac{c}{n^{3/2}}.$$

(b) On remarque que $T_n = U_n$ et que G et U_0 ont même distribution, d'où

$$|\mathbf{E}[f(T_n)] - \mathbf{E}[f(G)]| = \left|\sum_{k=1}^n \mathbf{E}[f(U_k)] - \mathbf{E}[f(U_{k-1})]\right| \leq \frac{cn}{n^{3/2}}.$$

Donc le terme à gauche tend vers 0 pour toute fonction $f \in C^3$ à dérivée troisième bornée, notons cet espace $\mathcal{H}'$ et posons $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \cap \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Alors, $\mathcal{H}$ contient en particulier les fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dont la fermeture, pour $\|\cdot\|_\infty$, contient les fonctions $C_c(\mathbb{R})$. Finalement, $\mathcal{H}$ est une famille de fonctions caractérisantes : $\mathcal{H} \subset C_b(\mathbb{R})$ et $C_c(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{H}}^{\|\cdot\|_\infty}$. Nous avons en fait démontré le TCL.

Exercice 2 *(5 points)*

1. (a) La variable aléatoire $S_n(x)$ est une somme de Bernoulli indépendantes, donc $S_n(x)$ suit une loi binomiale de paramètres (n,x). Aussi $\mathbf{E}(S_n(x)) = nx$ et $\mathbf{V}(S_n(x)) = nx(1-x)$.

   (b) On calcule explicitement l'espérance

$$B_n(x) = \mathbf{E}\left[f(M_n(x))\right] = \sum_{k=0}^n f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Il est immédiat que B_n est un polynôme, il est de degré inférieur à n.

2. (a) Clairement, $M_n(x)$ converge presque-sûrement vers x par la loi forte des grands nombres et donc $f(M_n(x))$ converge presque-sûrement vers $f(x)$ par continuité de f. Le théorème de convergence dominée — f est continue sur un compact donc bornée — implique que $B_n(x)$ converge vers $f(x)$.

(b) Soit $x \in [0,1]$. On rappelle tout d'abord que $\mathbf{E}(M_n(x)) = x$, puis par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, pour tout $\eta > 0$,
$$\mathbf{P}(|M_n(x) - x| > \eta) \leq \frac{\mathbf{V}(M_n(x))}{\eta^2} = \frac{x(1-x)}{n\eta^2} \leq \frac{1}{4n\eta^2},$$
car $0 \leq x(1-x) \leq 1/4$ sur $[0,1]$.

(c) Posons $A_{n,\eta,x} = \{|M_n(x) - x| > \eta\}$. Soit $\varepsilon > 0$, comme f est uniformément continue, sur $A^{\complement}_{n,\eta,x}$, $|f(M_n(x)) - f(x)| \leq \varepsilon$ où $\eta > 0$ est choisi tel que tout $x, y \in [0,1]$ tels que $|x-y| \leq \eta$ satisfont $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Nous avons donc
$$\|B_n - f\|_\infty \leq \sup_{x\in[0,1]} \mathbf{E}\left[|f(M_n(x)) - f(x)|\right] \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sup_{x\in[0,1]} \mathbf{P}(A_{n,\eta,x}).$$
Ainsi, $\limsup_{n\to\infty} \|B_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ car $\sup_{x\in[0,1]} \mathbf{P}(A_{n,\eta,x}) \leq \frac{1}{4n\eta^2}$ par la question précédante. Comme $\varepsilon > 0$ peut-être choisi arbitrairement petit, il vient que $\lim_{n\to\infty} \|B_n - f\|_\infty = 0$. On a donc montrer le théorème de Stone-Weierstrass.

Exercice 3 *(4 points)*

Plusieurs méthodes sont possibles pour résoudre cet exercice, nous utiliserons ici les fonctions caractéristiques et le conditionnement. Calculons
$$\phi_{Z_n}(t) = \mathbf{E}\left(\exp it\frac{\sum_{k=1}^{N_n} X_k}{\sqrt{N_n}}\right) = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{N_n} e^{itX_k/\sqrt{N_n}}\middle| N_n\right)\right] = \mathbf{E}(\phi_{X_1}(t/\sqrt{N_n})^{N_n}),$$
car la suite (X_n) est indépendante de la suite (N_n). Puis, puisque $N_n \to \infty$ presque sûrement, on obtient presque-sûrement
$$\phi_{X_1}(t/\sqrt{N_n})^{N_n} \sim \exp N_n \log(1 - \sigma^2 t^2/2N_n) \to e^{-\sigma^2 t^2/2}.$$
On conclut par convergence dominée : Z_n converge en loi vers une gaussienne centrée de variance σ^2.

Pour information, un mail vous a été envoyé le 23 novembre pour vous avertir de la mise en ligne sur Moodle de la correction de l'exercice 7 de la feuille de TD3. Dans cette correction, la fonction caractéristique de S_{N_n} est calculée sans utiliser le conditionnement.

Problème 4 *(8 points)*

Partie I

1. Soient $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \{\tau = i\} \cap \{\tau = j\} = \emptyset$ (τ est application !). Par ailleurs, si
$$\max\{|S_k(\omega)|, k = 1, \ldots n\} \geq t,$$
il existe $j = j(\omega)$ tel que $|S_j(\omega)| \geq t$ et il en existe un plus petit que tous les autres, noté j_0, et $\omega \in A_{j_0}$. Réciproquement si $\omega \in \bigcup_{k=1}^n A_k$, alors il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\tau(\omega) = j$ et en particulier $|S_j(\omega)| \geq t$.
2. On remarque que $S_k \mathbf{1}_{A_k}$ est $\sigma(X_1, \ldots, X_k)$-mesurable et $S_n - S_k$ est $\sigma(X_{k+1}, \ldots, X_n)$-mesurable. Or, les X_i sont indépendants si bien que ces deux tribus sont indépendantes et $S_k \mathbf{1}_{A_k} \perp S_n - S_k$. Puis, par indépendance
$$\mathbf{E}[S_k \mathbf{1}_{A_k}(S_n - S_k)] = \mathbf{E}(S_k \mathbf{1}_{A_k})\mathbf{E}(S_n - S_k) = 0,$$
car $\mathbf{E}(X_i) = 0$ pour tout $i \in \{k+1, \ldots, n\}$.
3. En décomposant le long de la partition $A_1, \ldots, A_n$:
$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{E}(S_n^2) \geq \mathbf{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n A_k}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[(S_n - S_k + S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k}] \\ = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\left[(S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k} + 2(S_n - S_k)S_k \mathbf{1}_{A_k} + S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}\right] \\ = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\left((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k}\right) + \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}).\end{aligned}$$
4. Il suffit de remarquer que $S_k^2 \mathbf{1}_{A_k} \geq t^2 \mathbf{1}_{A_k}$ alors
$$\mathbf{V}(S_n) \geq \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k}) \geq t^2 \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A_k) = t^2 \mathbf{P}(\max\{|S_k|, k = 1, \ldots, n\} \geq t).$$
Ceci démontre l'inégalité voulue.

Partie II

1. La suite $\ell(n)$ est croissante donc pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{2^n, \ldots, 2^{n+1}\}$
$$\frac{|S_k|}{\ell(k)} = \frac{|S_k|}{\ell(2^n)} \frac{\ell(2^n)}{\ell(k)} \leq \frac{|S_k|}{\ell(2^n)}.$$

2. À l'aide de l'inégalité de la partie I,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n^\delta) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{V}(S_n)}{\delta^2 \ell(2^n)^2} \leq V \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2 2^n n^{1+2\varepsilon} (\ln 2)^{1+2\varepsilon}} < \infty.$$

3. Par le premier lemme de Borel-Cantelli, $\mathbf{P}(A_n^\delta,\ i.s.) = 0$ et donc $\ell(2^n)^{-1} \max\{|S_k|, k \leq 2^n\} \leq \delta$ pour tout $n \geq 1$ sauf peut-être un nombre fini. Ceci implique en particulier que
$$\limsup_{n \to \infty} \ell(2^n)^{-1} \max\{|S_k|, k \leq 2^n\} \leq \delta, \quad p.s.$$
et comme $\delta > 0$ peut être rendu arbitrairement petit, cette limite supérieure est en fait nulle.

4. Pour tout $k \geq 1$, il existe n_k tel que $2^{n_k} \leq k \leq 2^{n_k+1}$. La suite n_k est croissante et tend vers ∞. De plus, en utilisant la majoration de la question 1
$$\frac{|S_k|}{\ell(k)} \leq \frac{|S_k|}{\ell(2^{n_k})} \leq \frac{\max\{|S_k|, k = 1, \ldots, 2^{n_k+1}\}}{\ell(2^{n_k})}.$$
Or,
$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\ell(2^{n+1})}{\ell(2^n)} \leq \sqrt{2},$$
d'où par la question 3
$$\limsup_{k \to \infty} \frac{|S_k|}{\ell(k)} \leq \sqrt{2} \limsup_{k \to \infty} \frac{\max\{|S_k|, k = 1, \ldots, 2^{n_k+1}\}}{\ell(2^{n_k+1})} = 0.$$