Examen du 8 janvier 2020 - 2h30 - Correction

Exercice 1 *(4 points)*

1. *C.f.* cours.
2. *C.f* cours.
3. Posons $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$. Par la loi forte des grands nombres de Kolmogorov, on a que $\overline{X}_n$ converge presque-sûrement vers $\mathbf{E}[X_1] = 1/\lambda$ ainsi, θ_n converge presque-sûrement vers λ.
4. On utilise la Δ-méthode en posant $\theta_n = f(\overline{X}_n)$ avec $f(x) = 1/x$. Un développement de Taylor donne

$$\sqrt{n}(\theta_n-\lambda) = \sqrt{n}(f(\overline{X}_n)-f(1/\lambda)) = \sqrt{n}f'(1/\lambda)(\overline{X}_n-1/\lambda)+\frac{1}{2}\sqrt{n}f''(1/\lambda)(\overline{X}_n-1/\lambda)^2+o(\sqrt{n}(\overline{X}_n-1/\lambda)^2). \tag{1}$$

Le TCL implique que

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1/\lambda) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \mathbf{V}(X_1)).$$

Par conséquent, le lemme de Slutsky implique que

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1/\lambda)^2 = \underbrace{\sqrt{n}(\overline{X}_n - 1/\lambda)}_{\Longrightarrow \mathcal{N}(0,\mathbf{V}(X_1))}\underbrace{(\overline{X}_n - 1/\lambda)}_{\longrightarrow 0} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$$

si bien que les deux derniers termes de 1 tendent vers 0 en probabilité. Une nouvelle application de Slutsky implique que

$$\sqrt{n}(\theta_n - \lambda) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, f'(1/\lambda)^2\mathbf{V}(X_1)).$$

Exercice 2 *(6 points)*

1. (a) Il suffit d'intégrer l'inégalité $f(x) \le kg(x)$:

$$\int f\ d\lambda \le k\int g\ d\lambda \quad \Longrightarrow k \ge 1.$$

   (b) Les suites (X_n) et (U_n) sont indépendantes, en particulier X_1 et U_1 sont indépendantes. Par conséquent, la densité de (X_1, U_1) est donnée par $(x, y) \to g(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$.

   (c) On calcule par Fubini :

$$\mathbf{P}[U_1 \le \alpha(X_1)] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{y\le\alpha(x)}g(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\ dxdy = \int_{\mathbb{R}} g(x)\int_0^{\alpha(x)}\ dy\ dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\alpha(x)\ dx = 1/k.$$

   (d) Soit $n \ge 1$ alors $\mathbf{P}[T = n] = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{n-1}\frac{1}{k}$. On remarque que T suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/k$.

2. (a) Soit $n \ge 1$. Par le théorème de transfert et Fubini :

$$\mathbf{E}[\phi(X_n)\mathbf{1}_{U_n\le\alpha(X_n)}] = \int \phi(x)g(x)\mathbf{1}_{0\le y\le\alpha(x)}\ dxdy = \int \phi(x)g(x)\alpha(x)\ dx = \frac{1}{k}\int \phi(x)f(x)\ dx.$$

   (b) En utilisant l'indice et en remarquant que tout est positif, on calcul

$$\mathbf{E}[\phi(X_T)] = \sum_{n\ge1}\mathbf{E}\left[\phi(X_n)\mathbf{1}_{T=n}\right] = \sum_{n\ge1}\mathbf{E}\left[\phi(X_n)\prod_{k=1}^{n-1}\mathbf{1}_{U_k>\alpha(X_k)}\mathbf{1}_{U_n\le\alpha(X_n)}\right]$$
$$= \sum_{n\ge1}\mathbf{E}\left[\phi(X_n)\mathbf{1}_{U_n\le\alpha(X_n)}\right]\mathbf{P}[U_1 > \alpha(X_1)]^{n-1}.$$

(c) Par les deux questions précédentes, on obtient :

$$\mathbf{E}[\phi(X_T)] = \frac{1}{k}\int \phi(x)f(x)\,dx \sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n-1} = \int \phi(x)f(x)\,dx.$$

D'où l'on conclut que X_T admet f pour densité.

3. (a) On calcule $h'(x) = e^{-x^3}(2x - 3x^4) \leq 0$ pour tout $x \geq 1$. Ainsi, $h(x) \leq h(1) = e^{-1}$ pour tout $x \geq 1$. Finalement, $k = \frac{1}{eZ}$ convient.

(b) On calcule facilement $G(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathbf{1}_{x\geq 1}$.

(c) Il suffit de poser $X = G^{-1}(V) = 1/(1-V)$.

(d) Pour utiliser la méthode de rejet, il nous suffit de savoir calculer α (et G). Or

$$\alpha(x) = \frac{f(x)}{kg(x)} = x^2 e^{-x^3+1},$$

expression dans laquelle Z a disparue.

Problème *(10 points)*

Partie I : On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

1. Comme Z_n est indépendante de $(X_{i,n+1})_{i\geq 1}$, on a

$$\mathbf{E}[Z_{n+1}|Z_n] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_n} X_{i,n+1}\middle| Z_n\right] = \sum_{i=1}^{Z_n}\mathbf{E}[X_{i,n+1}] = Z_n\mathbf{E}[X].$$

2. On calcule par la formule des probabilités totales

$$\mathbf{E}[Z_{n+1}] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Z_{n+1}|Z_n]] = \mathbf{E}[Z_n]\mathbf{E}[X].$$

D'où,

$$\mathbf{E}[Z_{n+1}] = \mathbf{E}[X]^{n+1}\mathbf{E}[Z_0] = \mathbf{E}[X]^{n+1}.$$

3. De la même façon, on a par indépendance

$$\mathbf{E}[Z_{n+1}^2|Z_n] = \mathbf{E}\left[\sum_{i,j=1}^{Z_n} X_{i,n+1}X_{j,n+1}\middle| Z_n\right] = \sum_{i,j=1}^{Z_n}\mathbf{E}[X_{i,n+1}X_{j,n+1}] = Z_n\mathbf{E}[X^2] + Z_n(Z_n-1)\mathbf{E}[X]^2$$
$$= Z_n^2\mathbf{E}[X]^2 + Z_n\mathbf{V}[X].$$

De là, on déduit

$$\mathbf{E}[Z_{n+1}^2] = \mathbf{E}[Z_n^2]\mathbf{E}[X]^2 + \mathbf{E}[Z_n]\mathbf{V}[X].$$

Enfin,

$$\mathbf{V}[Z_{n+1}] = \mathbf{E}[Z_n]\mathbf{V}[X] + \mathbf{E}[X]^2\mathbf{V}[Z_n].$$

Par récurrence, on vérifie que $\mathbf{V}[Z_n] = n\mathbf{V}[X]$ lorsque $\mathbf{E}[X] = 1$ et si $\mathbf{E}[X] \neq 1$:

$$\mathbf{V}[Z_n] = \mathbf{V}[X]\mathbf{E}[X]^{n-1}\frac{\mathbf{E}[X]^{n-1}-1}{\mathbf{E}[X]-1}.$$

4. Comme $\mathbf{E}[Z_n^2]$ tend vers 0, Z_n converge vers 0 dans $\mathbf{L}^2$ et en probabilité.

Partie II :

1. (a) Soit $s \in [0,1]$, alors par indépendance,

$$G_{Z_{n+1}}(s) = \mathbf{E}[s^{Z_{n+1}}] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_i}\middle| Z_n\right]\right] = \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{Z_n}\mathbf{E}[s^{X_{i,n+1}}]\right] = G_{Z_n}(\phi(s)).$$

(b) Le résultat suit directement par récurrence en remarquant que $G_{Z_0}(s) = s$.

2. Tout d'abord, on a facilement par passage au complémentaire :

$$\{T = \infty\} = \bigcup_{n \geq 0} \{Z_n \geq 1\} \quad \Longrightarrow \quad \{T < \infty\} = \bigcup_{n \geq 1} \{Z_n = 0\},$$

puisque Z_n est à valeurs entières. D'autre part, $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ traduit simplement la propriété $Z_n = 0$ implique $Z_{n+1} = 0$.

3. La continuité sur $[0, 1[$ vient de l'holomorphie de ϕ dans l'intérieur du disque unité. La continuité sur $[0, 1]$ est une application du théorème de converge monotone.

4. Comme la suite d'événement $(\{Z_n = 0\})_{n \geq 0}$ est croissante, la continuité à droite des mesures implique

$$p_{\text{ext}} = \mathbf{P}[T < \infty] = \mathbf{P}\left[\bigcup_{n \geq 0} \{Z_n = 0\}\right] = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}[Z_n = 0] = \lim_{n \to \infty} \phi^{(n)}(0).$$

De plus, par continuité de ϕ, on a

$$\phi(p_{\text{ext}}) = \phi(\lim_{n \to \infty} \phi^{(n)}(0)) = \lim_{n \to \infty} \phi^{(n+1)}(0) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}[Z_{n+1} = 0] = p_{\text{ext}}.$$

5. Par croissance de ϕ, $0 \leq q$ implique $\phi^{(n)}(0) \leq \phi^{(n)}(q) = q$. Par passage à la limite, $p_{\text{ext}} \leq q$. La probabilité d'extinction est donc le plus petit point fixe de ϕ.

6. Comme $X_{i,n+1} \geq 1$ presque-sûrement sous cette condition, il vient facilement que $Z_{n+1} \geq Z_n$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $Z_n \geq Z_0 = 1$ et $T = \infty$ presque-sûrement *i.e.* $p_{\text{ext}} = 0$.

7. (a) Par convexité de $s \to s^X$, $(ta+(1-t)b)^X \leq ta^X+(1-t)b^X$ et le résultat suit en passant à l'espérance.

   (b) Par convergence monotone,

$$\lim_{s \uparrow 1, s<1} \phi'(s) = \sum_{n \geq 1} n\mathbf{P}[X = n] \lim_{s \uparrow 1, s<1} s^{n-1} = m \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

   (c) La probabilité d'extinction est le plus petit point fixe de ϕ qui est croissante et convexe et satisfait $\phi(1) = 1$. Ainsi, si $m \leq 1$, la pente de ϕ au voisinage de $s = 1$ est plus petite que 1 et donc $\phi(s) \leq s$. Si $\mathbf{P}[X \geq 0] > 0$, alors ϕ est strictement convexe si bien que $p_{\text{ext}} = 1$. Sinon, $\mathbf{P}[X = 0] + \mathbf{P}[X = 1]$ et ϕ est affine, mais comme $\mathbf{P}[X = 0] > 0$, on obtient encore $p_{\text{ext}} = 1$.

   Lorsque $m > 1$, la pente de ϕ au voisinage de 1 est > 1 et donc il existe $s_0 \in [0, 1[$ tel que $\phi(s_0) < s_0$. Comme $\mathbf{P}[X = 0] > 0$, et ϕ convexe, ϕ admet un unique point fixe.

8. (a) Comme $m = (1-p)/p$, il vient qu'il y a extinction presque-sûre si $p \geq \frac{1}{2}$.

   (b) On suppose $p < \frac{1}{2}$. Alors, il s'agit de résoudre $\phi(s) = s$ où $\phi(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}$. Ainsi, $(1-p)s^2 - s + p = 0$ *i.e.* $s = p/(1-p)$.