Partiel du 28 novembre 2017 - 1h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(5 points)*

1. La fonction f est clairement mesurable positive. On calcule

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{1/2} 6e^{-3}e^{6x}\ dx = 6e^{-3}\left[\frac{e^{6x}}{6}\right]_{-\infty}^{1/2} = 1.$$

Ainsi, f est une densité de probabilité.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, alors, en faisant le changement de variable $y = 1 - 2x$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[g(Y)] = \mathbf{E}[g(1-2X)] &= \int_{-\infty}^{1/2} g(1-2x)6e^{-3}e^{6x}\ dx \\ &= \int_0^{\infty} g(y)3e^{-3y}\ dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)3e^{-3y}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(y)\ dy.\end{aligned}$$

On identifie la densité de Y et on conclut que $Y \sim \mathcal{E}(3)$.

3. On doit calculer pour $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_Y(t) = \mathbf{E}(e^{itY}) = 3\int_0^{\infty} e^{ity-3y}\ dy = \frac{3}{3-it}.$$

4. On va calculer l'espérance et la variance en utilisant la densité de Y et sa fonction caractéristique. On a en intégrant par parties

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^{\infty} 3xe^{-3x}\ dx = \int_0^{\infty} x\ d(-e^{-3x}) = [xe^{-3x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-3x}\ dx = 1/3.$$

De même, on calcule

$$\mathbf{E}(Y^2) = \int_0^{\infty} 3x^2e^{-3x}\ dx = \int_0^{\infty} x^2\ d(-e^{-3x}) = [x^2e^{-3x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-3x}\ dx = 2/3 \times 1/3 = 2/9.$$

Ainsi, $\mathbf{V}(Y) = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = 2/9 - 1/9 = 1/9$.
Avec les fonctions caractéristiques, on commence par évaluer les dérivées premières et secondes en 0 :

$$\phi_Y'(0) = \left.\frac{3i}{(3-it)^2}\right|_{t=0} = i/9 \quad \text{et} \quad \phi_Y''(0) = \left.\frac{-6}{(3-it)^3}\right|_{t=0} = -2/9.$$

On utilise ensuite les relations

$$i\mathbf{E}(Y) = \phi_Y'(0) \quad \text{et} \quad -\mathbf{E}(Y^2) = -\phi_Y''(0),$$

puis on conclut de la même façon que précédemment.

Exercice 2 *(5 points)*

1. Il existe plusieurs façons de répondre à ces questions, nous proposons ici d'utiliser le formalisme linéaire.

(a) On remarque que $X_1 = (1\,0\,0)X$. Cela montre que X_1 est une variable aléatoire gaussienne comme transformation linéaire d'un vecteur gaussien. Sa loi est donc complétement caractérisée par son espérance et sa variance. Or,

$$\mathbf{E}(X_1) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \mathbf{E}(X) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X_1) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1.$$

Ainsi, $X_1 \sim \mathcal{N}(1,1)$.

(b) Cette fois-ci, $X_2 + X_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix} X$. De façon analogue, il vient que $X_2 + X_3$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne et de variance donnée par

$$\mathbf{E}(X_2 + X_3) = 7 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(X_2 + X_3) = 13.$$

(c) Encore une fois $2X_1 + X_2 + X_3 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix} X$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne

$$\mathbf{E}(2X_1 + X_2 + X_3) = 9 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(2X_1 + X_2 + X_3) = 21.$$

2. Toujours par le même argument, $2X_1 + X_2 - X_3$ est une variable aléatoire gaussienne. Son espérance est égale à 5. La probabilité qu'une gaussienne soit inférieure à sa moyenne est $1/2$.
3. Il s'agit de calculer l'espérance et la matrice de covariance du vecteur gaussien Y :

$$\mathbf{E}(Y) = A\mu = \begin{pmatrix}9\\-2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathsf{Cov}\ (Y) = \begin{pmatrix}21 & 6\\ 6 & 13\end{pmatrix}.$$

Exercice 3 *(8 points)*

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Pour tout $a > 0$, la fonction Gamma d'Euler est définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t}\, dt.$$

La fonction f est mesurable positive. En faisant le changement de variable $y = \lambda x$, on calcule

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}e^{-y}}{\Gamma(a)}\, dy = 1.$$

2. On calcule

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{a+1}}{\Gamma(a+1)} x^a e^{-\lambda x}\, dx = \frac{a}{\lambda},$$

en reconnaissant la densié d'une $\Gamma(a+1, \lambda)$.
Pour calculer la variance, par une méthode simillaire, on calcule d'abord le moment d'ordre 2

$$\mathbf{E}(X^2) = \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a+1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^2\Gamma(a)} = \frac{(a+1)a}{\lambda^2},$$

d'où l'on déduit $\mathbf{V}(X) = \frac{a(a+1)}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2}$.
N'existant pas de notation universelle pour la loi Gamma, il est courant de parler de loi Gamma de moyenne a/λ et de variance a/λ^2 levant ainsi toute ambiguité.

3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, on calcule la loi de Y en faisant le changement de variable $y = \lambda x$. On obtient

$$\mathbf{E}[g(Y)] = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda x) f(x)\, dx = \int_0^\infty g(y) \frac{y^{a-1}e^{-y}}{\Gamma(a)}\, dy.$$

En identifiant la densité, il vient que $Y \sim \Gamma(a, 1)$.

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(a,\lambda)$ et $\Gamma(b,\lambda)$.

   (a) Comme X et Y sont indépendantes, la densité du couple est le produit des densités de X et Y :
   $$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}y^{b-1}e^{-\lambda(x+y)}\mathbf{1}_{[0,\infty[^2}(x,y).$$

   (b) On utiliser la caractérisation de la loi à l'aide de fonctions tests. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive et on fait le changement de varible $(u,v) = \phi(x,y) = (x+y, x/(x+y))$. La fonction ϕ est bijective de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ et ϕ^{-1} se calcule en résolvant le système (non linéaire)
   $$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \iff \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$
   Ainsi, $(x,y) = \phi^{-1}(u,v) = (uv, u(1-v))$. On calcule la valeur absolue du déterminant de la jacobienne, on obtient
   $$|\mathsf{det}\ D\phi^{-1}(x,y)| = \left|\mathsf{det}\begin{pmatrix} v & u \\ (1-v) & -u \end{pmatrix}\right| = |-uv-u+uv| = |u|.$$
   Finalement, la formule du changement de variable donne
   $$\begin{aligned}\mathbf{E}[g(U,V)] &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y, x/(x+y))f_X(x)f_Y(y)\ dxdy \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 g(u,v)\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a+b-1}e^{-\lambda u}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\ dudv.\end{aligned}$$
   En identifiant, il vient que la densité de (U,V) est donnée par
   $$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}e^{-\lambda u}u^{a+b-1}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u)\mathbf{1}_{]0,1[}(v).$$

   (c) La densité de (U,V) étant à variables séparées, donc les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

   (d) En toute généralité, connaissant la loi du couple, on peut calculer la loi des marginales en intégrant contre l'autre variable. Ici, on peut identifier les lois marginales directement : on reconnaît pour U la densité d'une $\Gamma(a+b,\lambda)$ et pour V la densité d'une loi $B(a,b)$.