Correction du partiel du 9 novembre 2018 - 1h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont **interdits**. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être **justifié** de manière **complète et synthétique**. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(8 points)*

1. Notons $f(x,y) = ke^{-x}\mathbf{1}_{0<y<x}$. Comme f est une densité de probabilité, outre sa positivité, il faut que $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = 1$, or par Fubini pour les fonctions mesurables positives
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = k\int_0^\infty\int_0^x e^{-x}\,dydx = k\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = k[-xe^{-x}]_0^\infty + k\int_0^\infty e^{-x}\,dx = k,$$
d'où $k=1$.
2. Pour obtenir la loi de X, il suffit d'intégrer f contre la variable y :
$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x}\mathbf{1}_{0<y<x}\,dy = xe^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$
De même pour obtenir la loi de Y :
$$f_Y(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x}\mathbf{1}_{0<y<x}\,dx = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)\int_y^\infty e^{-x}\,dx = e^{-y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y).$$
On a en particulier que X suit une loi Gamma de paramètre 2 et 1 alors que Y suit une loi exponentielle de paramètre 1.
3. On note $\phi(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) = (u,v)$. L'application ϕ est un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^2$, c'est en particulier un C^1 difféomorphisme. De plus, $\phi^{-1}(u,v) = (u+v, v-u)$ et
$$\text{Jac } \phi^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \left|\det \text{Jac } \phi^{-1}(u,v)\right| = 2,$$
d'où pour toute fonction g mesurable bornée
$$\mathbf{E}\left[g\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)\right] = 2\int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)f(u+v, v-u)\,dudv = 2\int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)e^{-u}e^{-v}\mathbf{1}_{v>u>0}\,dudv.$$
La densité de $\phi(X,Y)$ est donc $h(u,v) = 2e^{-u-v}\mathbf{1}_{0<u<v}$.
4. Les marginales de $\phi(X,Y)$ ne sont pas indépendantes car la densité n'est pas à variables séparées.

Exercice 2 *(5 points)*

1. Comme Y est le quotient dans la division euclidienne, Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (la valeur 0 n'est pas possible car $X+2\geq 3$). La variable Z qui est le reste est à valeurs dans $\{0,1,2\}$.
2. Commençons par Z :
   — $\mathbf{P}(Z=0) = \mathbf{P}(X\in 3\mathbb{N}+1) = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{P}(X=3k+1) = \sum_{k=0}^\infty p(1-p)^{3k} = \frac{p}{1-(1-p)^3} = \frac{1}{1+(1-p)+(1-p)^2}$;
   — $\mathbf{P}(Z=1) = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{P}(X=3k+2) = \sum_{k=0}^\infty p(1-p)(1-p)^{3k} = \frac{(1-p)}{1+(1-p)+(1-p)^2}$;
   — $\mathbf{P}(Z=2) = \sum_{k=0}^\infty \mathbf{P}(X=3k+3) = \frac{(1-p)^2}{1+(1-p)+(1-p)^2}$.
   Puis, pour Y, soit $k\in\mathbb{N}^*$, nous avons $\{Y=k\} = \cup_{\ell=0}^2\{X+2=3k+\ell\}$, donc
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=k) &= \mathbf{P}(X+2=3k) + \mathbf{P}(X+2=3k+1) + \mathbf{P}(X+2=3k+2)\\ &= p[(1-p)^{3k-3} + (1-p)^{3k-2} + (1-p)^{3k-1}] = p(1-p)^{3(k-1)}[1+(1-p)+(1-p)^2].\end{aligned}$$

3. Il s'agit de vérifier si pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2\}$,
$$\mathbf{P}((Y,Z)=(k,\ell)) = \mathbf{P}(Y=k)\mathbf{P}(Z=\ell).$$
Or,
$$\mathbf{P}((Y,Z)=(k,\ell)) = \mathbf{P}(X+2=3k+\ell) = p(1-p)^{3k+\ell-3}.$$
D'autre part,
$$\mathbf{P}(Y=k)\mathbf{P}(Z=\ell) = p(1-p)^{3k-3}[1+(1-p)+(1-p)^2]\frac{(1-p)^\ell}{1+(1-p)+(1-p)^2} = p(1-p)^{3k+\ell-3}.$$
Ainsi, Y et Z sont indépendantes.

Exercice 3 *(7 points)*

Soit $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction de répartition. Soit $p > 0$. On définit $G_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$G(x) = \frac{1}{p}\int_x^{x+p} F(\xi)\, d\xi.$$

1. Soit $a < b$, alors
$$p[G(b)-G(a)] = \int_b^{b+p} F(\xi)\, d\xi - \int_a^{a+p} F(\xi)\, d\xi \geq \begin{cases} F(b)-F(a+p) & \text{si} \quad a+p<b \\ \int_{a+p}^{b+p} F(\xi)\, d\xi - \int_a^b F(\xi)\, d\xi & \text{sinon.} \end{cases}$$
Dans le premier cas, la croissance de F implique que le second membre est positif. Dans le second cas, le second membre est minoré par $F(a+p)-F(b)$ qui est encore positif. Finalement, G est croissante. Comme F est à valeurs dans $[0,1]$, il vient que G est positive et la majoration suivante
$$G(x) = \frac{1}{p}\int_x^{x+p} F(\xi)\, d\xi \leq \frac{1}{p}\int_x^{x+p} d\xi \leq 1.$$
Soit $h \in]0,p[$, alors
$$G(x+h)-G(x) = \frac{1}{p}\int_{x+p}^{x+p+h} F(\xi)\, d\xi - \frac{1}{p}\int_x^{x+h} F(\xi)\, d\xi.$$
Lorsque h tends vers 0, ces deux intégrales tendent vers 0 montrant ainsi la continuité à droite de G. Enfin, $G(x) \geq F(x)$ donc $\lim_{x\to\infty} G(x) \geq \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. De même, $G(x) \leq F(x+p)$ si bien que $\lim_{x\to-\infty} G(x) \leq \lim_{x\to-\infty} F(x+p) = 0$.
2. En posant $y = x+h$ dans la preuve de la continuité à droite de G, on obtient que $G(y)-G(y-h)$ tends vers 0 lorsque h tends vers 0. Autrement dit, G est continue à gauche en tout point $y \in \mathbb{R}$. Ceci montre que la loi caractérisée par G est continue.
3. On s'intéresse à la dérivée à droite de G. Soit donc $h \in]0,p[$ et calculons pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{ph}\left[\int_{x+p}^{x+p+h} F(\xi)\, d\xi - \int_x^{x+h} F(\xi)\, d\xi\right] = \frac{F(x+p)-F(x)}{p}.$$
De la même façon que précédemment, en posant $y = x+h$, on obtient que
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(y)-G(y-h)}{h} = \frac{1}{ph}\left[\int_{y+p-h}^{y+p} F(\xi)\, d\xi - \int_{y-h}^{y} F(\xi)\, d\xi\right] = \frac{F((y+p)^-)-F(y^-)}{p}.$$
La dérivée à gauche de G est donc égale à la dérivée à droite de G presque-partout puisque F est continue presque-partout. Donc G est dérivable presque-partout de dérivée $G'(x) = \frac{F(x+p)-F(x)}{p}$ *p.p.* qui est clairement positive. On calcule par convergence monotone (l'intégrande est positive)
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+p)-F(x)}{p}\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} \frac{F(x+p)-F(x)}{p}\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} \frac{F(x+p)}{p}\, dx - \int_{-n}^{n} \frac{F(x)}{p}\, dx$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-n+p}^{n+p} \frac{F(x)}{p}\, dx - \int_{-n}^{n} \frac{F(x)}{p}\, dx = \lim_{n\to\infty} G(n)-G(-n) = 1. \quad (1)$$
Ceci montre que la loi caractérisée par G est à densité par rapport la mesure de Lebesgue.