Examen du 27 novembre 2019 - 1h30

Le sujet comporte 1 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(6 points)*

Soit $U = (X, Y)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ admettant pour densité

$$f(x, y) = ke^{-x}\mathbf{1}_{0<|y|<x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Nous avons l'égalité, puis par Fubini et une IPP :

$$1 = k\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x}\mathbf{1}_{0<|y|<x}\ dxdy = k\int_0^\infty 2xe^{-x}\ dx = 2k[-xe^{-x}]_0^\infty + 2k\int_0^\infty e^{-x}\ dx.$$

   Ainsi, $k = \frac{1}{2}$.

2. La densité de X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}\int_{-x}^{x} dy = xe^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

   Quand à la densité de Y :

$$f_Y(y) = \int_{|y|}^\infty \frac{1}{2}e^{-x}\ dx = \frac{1}{2}e^{-|y|}.$$

3. Soit g mesurable positve, alors

$$\mathbf{E}\left[g\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)\right] = \int g\left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) f(x, y)\ dxdy.$$

   On fait le changement de variable

$$(u, v) = \phi(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) = \phi^{-1}(u, v) = (u+v, v-u).$$

   On calcule le déterminant de la jacobienne :

$$|\mathsf{det}\ D\phi^{-1}(u, v)| = \left|\mathsf{det}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2.$$

   Le domaine initial $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > |y| > 0\}$ est envoyé sur $\mathbb{R}^2_{+,*}$ La formule du changement de variable donne :

$$\mathbf{E}\left[g\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)\right] = \int \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+}(u, v)g(u, v)e^{-u}e^{-v}\ dudv.$$

Exercice 2 *(6 points)*

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i}\mathbf{1}_{[i^{-1},+\infty)}(t).$$

1. Il nous faut vérifier trois points
   (a) F est croissante : soit $s \leq t$ alors $\mathbf{1}_{[i^{-1},\infty)}(s) \leq \mathbf{1}_{[i^{-1},\infty)}(t)$ donc $F(s) \leq F(t)$.

(b) F est continue à droite : soit t_n une suite qui décroit vers $t \in \mathbb{R}$ alors par convergence dominée :

$$2^{-i}\mathbf{1}_{[i^{-1},\infty)}(t) \leq 2^{-i} \quad \Longrightarrow \quad \lim_n F(t_n) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i} \lim_n \mathbf{1}_{[i^{-1},\infty)}(t_n) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i}\mathbf{1}_{[i^{-1},\infty)}(t) = F(t).$$

Ainsi, F est continue à droite.

(c) Enfin, $F(1) = 1$ donc $F(\infty) = 1$. De même, $F(0) = 0$ donc $F(-\infty) = 0$.

2. (a) $\mathbf{P}(X < 0) = F(0^-) = 0$.
   (b) $\mathbf{P}(X \leq 0) = 0$.
   (c) $\mathbf{P}(X \geq 1) = 1 - F(1^-) = 1 - \sum_{i\geq 2} 2^{-i} = \frac{1}{2}$.
   (d) $\mathbf{P}(X > 1) = 1 - F(1) = 0$.
   (e) $\mathbf{P}(0 \leq X < 1/2) = F(1/2^-) - F(0^-) = \frac{1}{4}$.
3. On a

$$\mathbf{P}(Y \leq t) = \mathbf{P}(X \geq 1/t) = 1-F(1/t^-) = 1-\sum_{i\geq 1} 2^{-i}\mathbf{1}_{(i^{-1},\infty)}(1/t) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i}(1-\mathbf{1}_{(-\infty,i)}(t)) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i}\mathbf{1}_{[i,\infty)}(t).$$

4. On calcule

$$\mathbf{P}(Y > k) = 1 - \sum_{i\geq 1} 2^{-i}\mathbf{1}_{[i,\infty)}(k) = \sum_{i>k} 2^{-i} = 2^{-k} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k\geq 1} \mathbf{P}(Y > k) < \infty.$$

Donc $Y \in \mathbf{L}^1$.

Exercice 3 *(4 points)*

Soient X et Y deux *v.a.r.* indépendantes et identiquement distribuées. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.

1. Nous avons

$$F_U(t) = \mathbf{P}(U \leq t) = 1 - \mathbf{P}(\min(X,Y) > t) = 1 - \mathbf{P}(X > t, Y > t) = 1 - (1 - F_X(t))^2$$

en utilisant que X, Y sont indépendantes et identiquement distribuées. De façon analogue $\mathbf{P}(\max(X,Y) \leq t) = F_X(t)^2$.

2. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.
   (a) Le couple (X, Y) a pour densité

$$f(x,y) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)\alpha^2 e^{-\alpha(x+y)}.$$

Soit g une application mesurable positive, alors par le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[g(U,V)] &= \int_{\mathbb{R}_+^2} g(x\wedge y, x-y)\alpha^2 e^{-\alpha(x+y)}\ dxdy \\ &= \int_0^\infty \int_0^y g(x, x-y)\alpha^2 e^{-\alpha(x+y)}\ dxdy + \int_0^\infty \int_0^x g(y, x-y)\alpha^2 e^{-\alpha(x+y)}\ dxdy = I + J.\end{aligned}$$

Dans l'intégrale I, on fait le changement de variables

$$(u,v) = \varphi(x,y) = (x, x-y) \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) = \varphi^{-1}(u,v) = (u, u-v).$$

L'application φ envoie le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq x \leq y\}$ sur le domaine $\Delta = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$. Le déterminant du jacobien donne :

$$|\mathsf{det}\ D\varphi^{-1}(u,v) = \left|\mathsf{det}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right| = 1.$$

Le théorème de changement de variables donne :

$$I = \int g(u,v)\alpha^2 e^{-\alpha(2u-v)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-}(u,v)\ dudv.$$

Dans l'intégrale J, on fait le changement de variables

$$(u, v) = \varphi(x, y) = (y, x - y) \iff (x, y) = \varphi^{-1}(u, v) = (u, u + v).$$

L'application φ envoie le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq y \leq x\}$ sur le domaine $\Delta = \mathbb{R}_+^2$. Le déterminant du jacobien donne :

$$|\mathrm{det}\, D\varphi^{-1}(u, v) = \left| \mathrm{det} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1.$$

Le théorème de changement de variables donne :

$$J = \int g(u, v)\alpha^2 e^{-\alpha(2u+v)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^2}(u, v)\, dudv.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[g(U, V)] = I + J &= \int g(u, v)\alpha^2 e^{-2\alpha u} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u)[e^{\alpha v}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_-}(v) + e^{-\alpha v}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v)]\, dudv \\
&= \int g(u, v)\alpha^2 e^{-2\alpha u} e^{-\alpha|v|} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}(u, v)\, dudv \\
&= \int g(u, v) \underbrace{2\alpha e^{-2\alpha u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u)}_{=f_U(u)} \underbrace{\frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|v|}\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(v)}_{=f_V(v)}\, dudv.
\end{aligned}$$

(b) La densité de (U, V) est à variables séparées donc U et V sont indépendantes.

Exercice 4 *(4 points)*

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y respectivement de loi $\Gamma(a, \theta)$ et $\Gamma(b, \theta)$ avec $a, b, \theta > 0$. On rappelle la densité d'une loi $\Gamma(a, \theta)$:

$$f(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} e^{-\theta x} x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On considère enfin une *v.a.r.* Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. On doit calculer

$$\mathbf{E}[X^n] = \int_0^\infty \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} e^{-\theta x} x^{n+a-1}\, dx = \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)} \frac{\theta^a}{\theta^{n+a}} = \frac{\prod_{i=1}^n (a + n - i)}{\theta^n}.$$

2. La loi de $X + Y$ se calcule à l'aide du produit de convolution puisque X et Y sont indépendantes :

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(x) = f_X * f_Y(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) f_Y(x - y)\, dy &= \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \int_0^x \frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\theta x} y^{a-1}(x - y)^{b-1}\, dy \\
&= \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a+b)} e^{-\theta x} x^{a+b-1} \int_0^1 \frac{1}{B(a, b)} z^{a-1}(1 - z)^{b-1}\, dz \\
&= \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a+b)} e^{-\theta x} x^{a+b-1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $X + Y \sim \Gamma(a + b, \theta)$.

3. Soit g une application mesurable bornée, alors

$$\mathbf{E}[g(Z^2)] = \int_{\mathbb{R}} g(z^2) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz = 2\int_0^\infty g(z^2) \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dz = \int_0^\infty g(x) \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}}\, dx.$$

Or, il est bien connu que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ si bien que l'on reconnaît une loi $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4. En itérant la question 2 sur le résultat de la question 3, on déduit que $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$. Il s'agit en fait de la $\chi^2(n)$.