Correction du rattrapage du 1er mars 2018 - 2h30

Exercice 1 *(6 points)*

1. La fonction h est mesurable positive. De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\ dx = \alpha c^\alpha \int_c^\infty x^{-\alpha-1}\ dx = \left[-c^\alpha x^{-\alpha}\right]_c^\infty = 1.$$

Ainsi, h est une densité de probailité.

2. Notons F la fonction de répartition de X_1. Alors, $F(t) = 0$ pour tout $t \leq c$. Pour $t > c$, on a

$$F(t) = \int_c^t h(x)\ dx = 1 - \left(\frac{c}{t}\right)^\alpha.$$

3. (a) Soit $t > c$, on peut calculer

$$\mathbf{P}(m_n > t) = (1 - F(t))^n = \left(\frac{c}{t}\right)^{n\alpha}.$$

d'où l'on déduit en passant au complémentaire que m_n suit une loi de Pareo de paramètre $n\alpha$ et c.

(b) On calcule

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k > \frac{3}{2}c\}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n\alpha}.$$

4. (a) La variable aléatoire N_n suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 2/3$.

(b) Ainsi, $\mathbf{P}(N_n \geq 2) = 1 - [(1-p)^n + np(1-p)^{n-1}]$.

Exercice 2 *(3 points)*

1. Il s'agit de la loi forte des grands nombres cadre $\mathbf{L}^2$. La limite presque-sûre est $\mathbf{E}(X_1)$.
2. La fonction $x \longrightarrow x^2$ est continue ce qui implique que la suite des moyennes au carré converge vers $\mathbf{E}(X_1)^2$.
3. On calcule

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \sum_{i,j} X_i X_j = \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j.$$

Ainsi,

$$Y_n = \frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_{k=1}^n X_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n X_i^2\right] = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n^2}\left[\left(\sum_{k=1}^n X_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n X_i^2\right] = \mathbf{E}(X_1)^2,$$

car la somme des carrés dans le crochet renormalisée par n tends vers $\mathbf{E}(X_1^2)$ par la loi des grands nombres. Donc, cette même somme renormalisée par n^2 tend vers 0.

Exercice 3 *(5 points)*

1. On vérifie les trois propriétés définissant une fonction de répartition.

(a) <u>G est croissante :</u> soit $a < b$, alors puisque F est croissante

$$p[G(b) - G(a)] = \int_b^{b+p} F(\xi)\ d\xi - \int_a^{a+p} F(\xi)\ d\xi \geq \begin{cases} F(b) - F(a) & \text{si} \quad a + p < b \\ \int_{a+p}^{b+p} F(\xi)\ d\xi - \int_a^b F(\xi)\ d\xi & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le premier cas, la croissance de F implique que le second membre est positif. Dans le second cas, le second membre est minoré par $F(a+p) - F(b)$ qui est encore positif. Finalement, G est croissante.

(b) <u>G est continue à droite :</u> soit $h \in]0, p[$, alors

$$G(x+h) - G(x) = \frac{1}{p} \int_{x+p}^{x+p+h} F(\xi)\ d\xi - \frac{1}{p} \int_{x}^{x+h} F(\xi)\ d\xi.$$

Lorsque h tends vers 0, ces deux intégrales tendent vers 0 montrant ainsi la continuité à droite de G.

(c) <u>$G \to_{-\infty} 0$ et $G \to_{\infty} 1$:</u> Enfin, $G(x) \geq F(x)$ donc $\lim_{x\to\infty} G(x) \geq \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. De même, $G(x) \leq F(x+p)$ si bien que $\lim_{x\to-\infty} G(x) \leq \lim_{x\to-\infty} F(x+p) = 0$. On conclut en remarquant que $0 \leq G(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(d) En posant $y = x + h$ dans la preuve de la continuité à droite de G, on obtient que $G(y) - G(y-h)$ tends vers 0 lorsque h tends vers 0. Autrement dit, G est continue à gauche en tout point $y \in \mathbb{R}$. Ceci montre que la loi caractérisée par G est diffuse.

2. Par définition, la loi caractérisée par G est diffuse si G est continue. En fait, elle est même à densité par rapport à la mesure de Lebesgue ; c'est l'objet de la question suivante.

3. On va montrer que la dérivée de G existe en tout point et on vérifie que c'est une densité de probabilité. On conclura en rappelant que la densité (à égalité presque sûre près) caractérise la loi.
On s'intéresse à la dérivée à droite de G. Soit donc $h \in]0, p[$ et calculons pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{ph} \left[\int_{x+p}^{x+p+h} F(\xi)\ d\xi - \int_{x}^{x+h} F(\xi)\ d\xi \right] = \frac{F(x+p) - F(x)}{p}.$$

De la même façon que précédemment, en posant $y = x + h$, on calcule la dérivée à gauche

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{G(y) - G(y-h)}{h} = \left[\int_{y+p-h}^{y+p} F(\xi)\ d\xi - \int_{y-h}^{y} F(\xi)\ d\xi \right] = \frac{F(y+p) - F(y)}{p}.$$

La dérivée à gauche de G est donc égale à la dérivée à droite de G. Donc G est dérivable de dérivée $G'(x) = \frac{F(x+p)-F(x)}{p}$ qui est clairement positive. On calcule par convergence monotone (l'intégrande est positive)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+p) - F(x)}{p}\ dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{F(x+p) - F(x)}{p}\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{F(x+p)}{p}\ dx - \int_{-n}^{n} \frac{F(x)}{p}\ dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n+p}^{n+p} \frac{F(x)}{p}\ dx - \int_{-n}^{n} \frac{F(x)}{p}\ dx = \lim_{n\to\infty} G(n) - G(-n) = 1.\end{aligned}$$

Ainsi G est dérivable et G' est une densité de probabilité.

Exercice 4 *(5 points)*

1. (a) Les variables aléatoires U et V sont $i.i.d.$ ainsi la densité du couple (U, V) notée $h(u, v)$ est symétrique $h(u, v) = h(v, u)$. À l'aide de fonction tests, on vérifie facilement l'égalité en loi annoncée.

(b) Par définition du maximum,

$$\mathbf{E}(\max(U, V)) = \mathbf{E}(U\mathbf{1}_{U>V}) + \mathbf{E}(V\mathbf{1}_{V>U}).$$

La question précédente permet de conclure.

(c) On applique le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\max(U, V)] = 2 \int_{\mathbb{R}^2} u\mathbf{1}_{u>v} \frac{e^{-(u^2+v^2)/2}}{2\pi}\ dudv &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{v}^{\infty} ue^{-u^2/2}\ due^{-v^2/2}\ dv \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2}\ dv = \sqrt{\frac{1}{\pi}}.\end{aligned}$$

2. Soit $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendant du vecteur $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

(a) Posons $A = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho} & 0 & \sqrt{\rho} \\ 0 & \sqrt{1-\rho} & \sqrt{\rho} \end{pmatrix}$. Alors, il est clair que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$. Comme U, V, W sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, cela implique $\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien. Il en va de même pour $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ comme toute transformation linéaire de vecteurs gaussiens.

Un vecteur gaussien est caractérisée par sa moyenne et sa matrice de covariance. Or, clairement, l'espérance de (X, Y) est nulle, $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) = 1$ et $\mathsf{cov}\ (X, Y) = \rho \mathbf{V}(W) = \rho$.

(b) Il est immédiat que $\max(X, Y) = W\sqrt{\rho} + \sqrt{1-\rho}\max(U, V)$ (c'est au sens partout égales !). La linéarité de l'espérance permet de conclure.