Rattrapage du 19 février 2020 - 2h30 - Correction

Exercice 1:

1. (a) On calcule :
$$F_n(t) = \mathbf{P}[Y_n \le t] = \mathbf{P}[U_1 \le t^{1/n}] = 0 \vee (t^{1/n} \wedge 1).$$
(b) De façon similaire, nous avons pour $t \in [0,1]$
$$H_n = \mathbf{P}[V_n \le t] = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}[Y_k \le t] = 0 \vee (t^{h_n} \wedge 1).$$
Par ailleurs,
$$G_n = \mathbf{P}[W_n \le t] = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}[W_k \le t] = 0 \vee \left(t^{\sum_{k=1}^n 2^{-k}} \wedge 1\right) = 0 \vee \left(t^{\sum_{k=1}^n 2^{-k}} \wedge 1\right) = 0 \vee \left(t^{1-\frac{1}{2^n}} \wedge 1\right).$$
(c) Clairement, $\{V \le t\} \subset \cap_{n\ge 1}\{V_n \le t\}$. Réciproquement, $\omega \in \cap_{n\ge1}\{V_n(\omega) \le t\}$ signifie que t est un majorant de $\{V_n(\omega), n \ge 1\}$ si bien que $V(\omega) \le t$ par définition de la borne supérieure.
(d) Par continuité à droite d'une mesure de probabilité, nous avons
$$\mathbf{P}[V \le t] = \mathbf{P}\left[\bigcap_{n\ge1}\bigcap_{k=1}^{n}\{V_k \le t\}\right] = \lim_{n\to\infty} \downarrow \mathbf{P}[V_n \le t] = \mathbf{1}_{[1,\infty)}(t),$$
car $\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$. De l'expression de la fonction de répartition, on constate que $V = 1$ presque-sûrement.
(e) Par la même continuité à droite, nous avons que
$$\mathbf{P}[W \le t] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}[W_n \le t] = 0 \vee (t \wedge 1).$$
On reconnaît la fonction de répartition d'une loi uniforme.
(f) On commence par calculer la fonction de répartition de $(1 - V_n)\ln n$, $n \ge 1$, ou plus précisément son complémentaire à un qui induit quelques simplifications :
$$\mathbf{P}[(1-V_n)\ln n \ge t] = \mathbf{P}[V_n \le 1 - t/\ln n] = \begin{cases} 0 & \text{si } t > \ln n \\ \left(1 - \frac{t}{\ln n}\right)^{h_n} & \text{si } t \in [0, \ln n] \\ 1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$
$$\sim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)e^{-t} + \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(t).$$
Ceci montre la convergence vers une loi exponentielle de paramètre 1.

2. (a) On applique la loi forte des grands nombres de Kolmogorov en remarquant que $(\psi(U_n))_{n\ge1}$ est *i.i.d.* et $\psi(U_1) \in \mathbf{L}^1$. De plus
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\psi(X_1) + \cdots + \psi(U_n)\right) = \mathbf{E}[\psi(U_1)] = I.$$
(b) Pour tout $n \ge 1$, X_n est $\sigma(U_{2n-1}, U_{2n})$. Or, par le caractère *i.i.d.* de $(U_n)_{n\ge1}$, on obtient que $(\sigma(U_{2n-1}, U_{2n}))_{n\ge1}$ est une famille indépendante de sous-tribus.
(c) La variable aléatoire X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Par le théorème de Fubini, on obtient
$$p = \int_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{y<\psi(x)}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\psi(x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = I.$$
Par conséquent, par la loi forte des grands nombres, on a également que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{E}[X_1] = I.$$

(d) On calcule

$$\mathbf{V}[\psi(U_1)] = \mathbf{E}[\psi(U_1)^2] - \mathbf{E}[\psi(U_1)]^2 = \int_0^1 \psi(x)^2 \, \mathrm{d}x - I^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[X_1] = I - I^2.$$

(e) On remarque que $\psi(x)^2 \leq \psi(x)$ si bien que $\mathbf{V}[\psi(U_1)] \leq \mathbf{V}[X_1]$. Nous choisirons la méthode dont la variance est la plus faible. Cet exercice met en exergue l'importance du choix de la méthode de simulation par Monte-Carlo.

Exercice 2 *(1 points)*

1. On calcule par indépendance

$$\varphi_n(t) = \mathbf{E}[e^{itS_n}] = \prod_{k=1}^n \mathbf{E}[e^{itX_k}] = e^{(1-e^{it})\sum_{k=1}^n \lambda_k} = e^{s_n(1-e^{it})}.$$

2. Pour tout $n \geq 1$, S_n suit une loi de Poisson de paramètre s_n. De là, on déduit que $\mathbf{E}[S_n] = \mathbf{V}[S_n] = s_n$.
3. Comme $X_k \geq 0$ pour tout $k \geq 1$, il vient que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de variables aléatoires et donc converge dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vers $S = \sup_{n\geq 1}$
4. (a) Par convergence monotone, nous obtenons

$$\mathbf{E}[S] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S_n] = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k < \infty.$$

(b) L'inégalité de Markov implique $S < \infty$ presque-sûrement.

(c) Par convergence dominée, nous avons

$$\mathbf{E}[e^{itS}] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[e^{itS_n}] = e^{(1-e^{it})\sum_{k=1}^\infty \lambda_k}.$$

Ceci montre que S suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k$.

5. (a) Soit $r \geq 0$. Comme $S = \sup_{n\geq 1} S_n$, on remarque $\{S > r\} = \cup_{n\geq 1}\{S_n > r\}$. Puis par continuité à gauche des mesures, on obtient

$$\mathbf{P}[S > r] = \mathbf{P}\left[\bigcup_{n\geq 1}\{S_n > r\}\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}[S_n > r] = \lim_{n\to\infty} e^{-s_n} \sum_{k=\lfloor r\rfloor+1}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} = 1 - \underbrace{e^{-s_n}\sum_{k=0}^{\lfloor r\rfloor} \frac{s_n^k}{k!}}_{\longrightarrow_{n\to\infty} 0}.$$

La dernière limite est obtenue par croissance comparée. Puis, on remarque que

$$\mathbf{P}[S = \infty] = \mathbf{P}[\cap_{k=0}^\infty \{S > k\}] = 1.$$

D'où $S = \infty$ presque-sûrement.

(b) On remarque que

$$Y_n = \frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^n (X_k - \lambda_k),$$

et donc, par le lemme de Kronecker, il s'agit de montrer que la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{X_n - \lambda_n}{s_n}.$$

Pour ce faire, nous pouvons calculer la variance de la série en utilisant l'indépendance et l'inégalité indiquée

$$\mathbf{V}\left[\sum_{n\geq 1}\frac{X_n - \lambda_n}{s_n}\right] = \sum_{n\geq 1}\mathbf{V}\left[\frac{X_n-\lambda_n}{s_n}\right] = \sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{\lambda_1^2} + \sum_{n\geq 2}\left[\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\right] = \frac{2}{\lambda_1^2}.$$

(c) Nous pouvons calculer la fonction caractéristique de $\sqrt{n}Y_n$:

$$\mathbf{E}[e^{itY_n}] = \varphi_n(t/\sqrt{s_n})e^{-it\sqrt{s_n}} = \exp(s_n(1-e^{it/\sqrt{s_n}}) - it\sqrt{s_n})$$
$$= \exp\left(s_n\left[\frac{it}{\sqrt{s_n}} - \frac{t^2}{2s_n} + o(s_n^{-1})\right] - it\sqrt{s_n}\right) \to e^{-t^2/2}.$$

Ainsi, $\sqrt{n}Y_n$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite.

Exercice 3 *(1 points)*

1. (a) On calcule, pour $n \geq 1$, ($n = 0$ est immédiat), par indépendance

$$\mathbf{E}[M_n] = (\cosh\alpha)^{-n}\mathbf{E}[e^{\alpha S_n}] = (\cosh\alpha)^{-n}\mathbf{E}[e^{\alpha X_1}]^n = 1.$$

(b) Par la loi des grands nombres

$$M_n^{\frac{1}{n}} = \exp(\alpha\frac{S_n}{n} - \ln\cosh\alpha) \to e^{-\ln\cosh\alpha} < 1.$$

(c) Nous avons $\mathbf{E}[|M_n|] = 1$ qui ne tend pas vers 0 donc M_n ne converge pas dans $\mathbf{L}^1$.

2. (a) Soit $\omega \in \{\limsup_{n\to\infty} S_n(\omega) = \infty\}$ alors il existe une sous-suite $n_k = n_k(\omega)$ tel que $S_{n_k}(\omega) = k$. Ainsi, $S_{n_1}(\omega) = 1$ et $T(\omega) = n_k(\omega) < \infty$.

(b) L'événement $\{\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty\}$ est un évévement asymptotique associée à la suite $(X_k)_{k\geq 1}$ qui est *i.i.d.*. Ainsi, $\mathbf{P}[\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty] \in \{0,1\}$.

(c) Tout d'abord, nous avons clairement

$$\limsup\{S_n \geq a\sqrt{n}\} \subset \{\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\},$$

d'où la première inégalité. Puis, par continuité à droite des mesures,

$$\mathbf{P}\left[\limsup\{S_n \geq a\sqrt{n}\}\right] = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left[\bigcup_{k=n}\{S_k \geq a\sqrt{k}\}\right] \geq \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\mathbf{P}[S_k \geq a\sqrt{k}],$$

où la dernière inégalité provient de la croissance d'une mesure. Plus précisément, soit $n \geq 1$, alors pour tout $k \geq n$, nous avons

$$\{S_k \geq a\sqrt{k}\} \subset \bigcup_{k\geq n}\{S_k \geq a\sqrt{k}\} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}[S_k \geq a\sqrt{k}] \leq \mathbf{P}\left[\bigcup_{k\geq n}\{S_k \geq a\sqrt{k}\}\right].$$

La quantité à droite étant indépendante de k, il est possible de prendre le sup sur k à gauche. Enfin, l'égalité $\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}[S_n \geq a\sqrt{n}] = 1 - \Phi(a)$ provient de la loi des grands nombres.

(d) Comme $a > 0$, $1 - \Phi(a) > 0$. La question 2(b) implique $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ presque-sûrement. Puis $T < \infty$ presque-sûrement par la question 2(a).

3. (a) Nous avons $\mathbf{1}_{T<\infty}(n \wedge T)$ qui converge presque-sûrement vers $T\mathbf{1}_{T<\infty}$ [1]. Par composition, nous avons donc que $Z_n\mathbf{1}_{T<\infty}$ converge presque-sûrement vers $M_T\mathbf{1}_{T<\infty} = e^{\alpha}(\cosh\alpha)^{-T}\mathbf{1}_{T<\infty}$.

(b) $Z_n \geq 0$ car $M_n \geq 0$. Puis, on remarque que, pour tout $n \geq 0$, $S_{n\wedge T} \leq 1$ presque-sûrement d'où $Z_n \leq e^{\alpha}$. On conclut à la convergence dans $\mathbf{L}^1$ par convergence dominée.

4. (a) Nous avons d'une part que M_k/M_{k-1} est $\sigma(X_k)$-mesurable et d'autre part que $M_{k-1}\mathbf{1}_{T\geq k}$ est $\sigma(X_1,\ldots,X_{k-1})$-mesurable. Ainsi, par indépendance de la suite (X_k) on obtient l'indépendance des deux variables aléatoire.

1. En fait, plus généralement, $n \wedge T$ converge presque-sûrement vers T dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

(b) L'égalité est immédiate par définition de T. Puis, on peut calculer l'espérance en utilisant l'indépendance :

$$\mathbf{E}[Z_n] = \mathbf{E}[M_0] + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[M_{k-1}\mathbf{1}_{T\geq k}]\mathbf{E}\left[\frac{M_k}{M_{k-1}}\right] - 1.$$

Puis, on remarque que

$$\mathbf{E}\left[\frac{M_k}{M_{k-1}}\right] = \frac{\mathbf{E}[e^{\alpha X_k}]}{\cosh\alpha} = 1.$$

D'où, pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{E}[Z_n] = 1$.

(c) Des questions précédentes, on obtient :

$$1 = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[Z_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[Z_n \mathbf{1}_{T<\infty}] = \mathbf{E}[M_T] = e^{\alpha}\mathbf{E}[(\cosh\alpha)^{-T}].$$

(d) Il suffit de poser $s = \cosh\alpha$ et de remarquer que $\alpha \to \cosh\alpha$ est une bijection de $(0,\infty)$ dans lui-même.