

Examen du 21 décembre 2017 - 2h30

Le sujet comporte 2 pages. Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont interdits. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question précédente sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être justifié de manière complète et synthétique. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.

Question de cours (2 points)

Fabien a malencontreusement laissé échapper un feuillet de son cours dans la marre de l'Ensaï. Aussi a-t-il perdu l'énoncé d'un lemme très important. Saurez-vous l'aider à le retrouver ?

Lemme de :

....., alors $((X_n, Y_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers (X, c) .

Exercice 1 (6 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit ϕ le C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)$ dans \mathbb{R}_*^2 défini par $\phi(u, v) = (\sqrt{u} \cos(v), \sqrt{u} \sin(v))$. On pose $(U, V) = \phi^{-1}(X, Y)$. On se propose d'étudier la loi du couple (U, V) .

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Exprimer $\mathbf{E}(g \circ \phi^{-1}(X, Y))$ en fonction des densités de X et Y notées f_X et f_Y respectivement.
2. À l'aide du changement de variable $(x, y) = \phi(u, v)$, montrer que

$$\mathbf{E}(g(U, V)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) \frac{e^{-u/2}}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u) \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{(0, 2\pi)}(v) \, dudv.$$

3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer les lois de U et de V .
5. Déterminer la loi de $1 - \exp(-U/2)$.
6. Proposer une procédure permettant de simuler une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$.

Exercice 2 (6 points)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles (définies sur un même espace probabilisé), indépendantes et identiquement distribuées, de carré intégrable. On note $m = \mathbf{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}(X_1) > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad M_n = \frac{S_n}{n}, \quad \text{et} \quad T_n = \sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - m \right).$$

1. (a) Justifier brièvement la convergence en loi de la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ et préciser sa limite.
 (b) Montrer que la suite $(M_n + m)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers $2m$.
 (c) En déduire que la suite $(\sqrt{n}(M_n^2 - m^2))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable au point $m \in \mathbb{R}$.
 (a) Justifier l'égalité

$$f(M_n) = f(m) + (M_n - m)f'(m) + (M_n - m)\varepsilon(M_n - m), \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

- (b) Montrer que la suite $(\sqrt{n}(M_n - m)\varepsilon(M_n - m))_{n \geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.

- (c) En déduire que la suite $(\sqrt{n}(f(M_n) - f(m)))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi. Retrouve-t-on le résultat de la question 1.(c) ?

Exercice 3 (6 points)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes centrées. On suppose, pour tout $n \geq 1$, que X_n est à valeurs dans $\{-2^n, -1, 1, 2^n\}$ et vérifie

$$\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = -2^n) = \mathbf{P}(X_n = 2^n) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

On note pour tout $n \geq 1$

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $(M_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.

1. Pourquoi ne peut-on pas appliquer la loi des grands nombres pour montrer la convergence presque sûre de $(M_n)_{n \geq 1}$ vers 0 ?
2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n \mathbf{1}_{|X_n| \leq 1}$.
 - (a) Déterminer la loi de Y_n , puis sa moyenne et sa variance.
 - (b) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{V}(Y_n)}{n^2} < \infty$. Puis en utilisant un théorème sur les séries aléatoires, montrer que la série (aléatoire) de terme général Y_n/n converge presque sûrement dans \mathbb{R} .
 - (c) En déduire que la suite $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
 - (d) Montrer que $\mathbf{P}(\liminf\{X_n = Y_n\}) = 1$.
 - (e) Conclure.

