Examen du 20 décembre 2018 - 2h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(5 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles *i.i.d.* admettant un moment d'ordre 3 et telle que $\mathbf{E}(X_1)=0$ et $\mathbf{V}(X_1)=1$. Considérons d'autre part $(G_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles *i.i.d.* de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. On note $T_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k$ et pour $k=1,\dots,n$

$$U_k=\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1+\cdots+X_k+G_{k+1}+\cdots+G_n),\quad U_0=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n G_i,\quad \text{et}\quad U_n=T_n.$$

1. Quelle est la loi de U_0 ?
2. On pose, pour $k=1,\dots,n$, $V_k=U_k-X_k/\sqrt{n}$. Montrer que $V_k=U_{k-1}-G_k/\sqrt{n}$.
3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction C^3 dont la dérivée troisième est bornée.
   (a) En écrivant U_k et U_{k-1} en fonction de V_k et en utilisant un développement de Taylor au point V_k, montrer que
   $$|\mathbf{E}[f(U_k)]-\mathbf{E}[f(U_{k-1})]|\leq\frac{c}{n^{3/2}},$$
   où $c>0$ est une constante que l'on déterminera.
   (b) Soit G de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que
   $$|\mathbf{E}[f(T_n)]-\mathbf{E}[f(G)]|\leq\frac{c}{\sqrt{n}}.$$
   Quel théorème bien connu a-t-on redémontré (sous des hypothèses plus fortes cependant) ? Justifier.

Exercice 2 *(5 points)*

Soient $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite variables aléaroires *i.i.d.* de loi uniforme sur $[0,1]$. On note pour tout $x\in[0,1]$

$$\forall n\geq 1,\quad S_n(x)=\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[0,x]}(U_k),\quad M_n(x)=\frac{S_n(x)}{n},\quad \text{et}\quad B_n(x)=\mathbf{E}[f(M_n(x))].$$

1. (a) Quelle est la loi de $S_n(x)$, sa moyenne, sa variance ?
   (b) Montrer que B_n est un polynôme.
2. (a) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, $\lim_{n\to\infty}B_n(x)=f(x)$.
   (b) Établir l'inégalité
   $$\forall x\in[0,1],\quad \forall\eta>0,\quad \mathbf{P}(|M_n(x)-x|>\eta)\leq\frac{x(1-x)}{n\eta^2}\leq\frac{1}{4n\eta^2}.$$
   (c) En déduire que (B_n) converge vers f uniformément sur $[0,1]$ — on pourra remarquer que $|B_n(x)-f(x)|\leq\mathbf{E}[|f(M_n(x))-f(x)|]$ et utiliser l'inégalité précédente. Quel théorème bien connu a-t-on redémontré ?

Exercice 3 *(4 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.*, centrées, de variance σ^2. On considère en outre une suite $(N_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. Montrer que si $N_n \to \infty$ p.s. quand $n \to \infty$ alors $Z_n = S_{N_n}/\sqrt{N_n}$ converge en loi vers une variable aléatoire que l'on déterminera.

Problème 4 *(8 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes tel que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{E}(X_n) = 0$ et $V = \sup\{\mathbf{V}(X_n) : n \geq 1\} < \infty$. On cherche à montrer

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n^{1/2}(\ln n)^{1/2+\varepsilon}} = 0, \quad p.s. \qquad \text{où} \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n. \tag{1}$$

Ce résultat découle d'une inégalité dûe à Kolmogorov ; la partie I du problème est consacrée à la démonstration de cette inégalité. La seconde partie sera dévolue à la démonstration du résultat (1) qui est un rafinement de la loi des grands nombres.

Partie I

L'objectif de cette partie est d'établir que pour tout $t > 0$

$$\mathbf{P}(\max\{|S_k|, k = 1, \ldots, n\} \geq t) \leq \frac{\mathbf{V}(S_n)}{t^2}. \tag{2}$$

On fixe $t > 0$ et $n \geq 1$ une fois pour toute et on définit

$$\tau = \min\big\{k \in \{1, \ldots, n\} : |S_k| \geq t\big\}.$$

Pour $k = 1, \ldots, n$, on note $A_k = \{\tau = k\}$.

1. Montrer que $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints et que $\big\{\max\{|S_k| : k = 1, \ldots, n\} \geq t\big\} = \bigcup_{k=1}^n A_k$.
2. Montrer que $S_k \mathbf{1}_{A_k}$ et $S_n - S_k$ sont indépendantes. En déduire que $\mathbf{E}(S_k \mathbf{1}_{A_k}(S_n - S_k)) = 0$.
3. Montrer que $\mathbf{1}_{\cup_{k=1}^n A_k} \leq 1$ *p.s.*. En déduire que $\sum_{k=1}^n \mathbf{E}[(S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k}] \leq \mathbf{V}(S_n)$.
4. En déduire l'inégalité (2) de Kolmogorov.

Partie II

Soit $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \geq 1$, $\ell(n) = n^{1/2}(\ln n)^{1/2+\varepsilon}$. On cherche donc à montrer que $\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\ell(n)} = 0$ presque-sûrement.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$, $\frac{|S_k|}{\ell(k)} = O\left(\frac{|S_k|}{\ell(2^n)}\right)$.
2. Soit $\delta > 0$, on note $A_n^\delta = \big\{\max\{|S_k| : 1 \leq k \leq 2^n\} > \delta\ell(2^n)\big\}$. Montrer que $\sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}(A_n^\delta) < \infty$.
3. En déduire que
$$\limsup_{n\to\infty} \ \ell(2^n)^{-1} \max\big\{|S_k| : k \leq 2^n\big\} \leq \delta, \quad p.s..$$
4. Conclure.