Examen du 8 janvier 2020 - 2h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(4 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Énoncer la loi forte des grands nombres de Kolmogorov.
2. Énoncer le théorème central limite.
3. Montrer que $\theta_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n X_k}$ converge presque-sûrement vers une limite que l'on précisera.
4. Montrer que $\sqrt{n}(\theta_n - \lambda)$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne dont on précisera les paramètres.

Exercice 2 *(6 points)*

Dans cet exercice, on s'intéresse à une méthode de simulation de loi appelée méthode de rejet. Le contexte est le suivant : on cherche à simuler une loi à densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$. À cette fin, on suppose qu'il existe une autre densité de probabilité g par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et une constante $k \geq 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \quad f(x) \leq kg(x).$$

Dans la suite, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha(x) = \frac{f(x)}{kg(x)}\mathbf{1}_S(x) \quad \text{où} \quad S = \{x \in \mathbb{R}^d : g(x) > 0\}.$$

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de densité g et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite, indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$, de variables aléatoires *i.i.d.* de loi uniforme sur $[0, 1]$. On note

$$T = \inf\{n \geq 1 : U_n \leq \alpha(X_n)\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. On remarquera que $\mathbf{P}(X_1 \in S) = 1$ si bien que $\alpha(X_n)$ est bien définie presque-sûrement.

1. (a) Justifier que $k \geq 1$.
   (b) Déterminer la densité de (X_1, U_1).
   (c) En déduire que $\mathbf{P}[U_1 \leq \alpha(X_1)] = 1/k$.
   (d) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\mathbf{P}[T = n]$. En déduire la loi de T.
2. Soit $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive.
   (a) Soit $n \geq 1$. Déterminer une forme intégrale de $\mathbf{E}[\phi(X_n)\mathbf{1}_{U_n\leq\alpha(X_n)}]$ faisant intervenir la densité f.
   (b) Montrer que
   $$\mathbf{E}[\phi(X_T)] = \sum_{n\geq 1} \mathbf{E}\left[\phi(X_n)\mathbf{1}_{U_n\leq\alpha(X_n)}\right] \mathbf{P}[U_1 > \alpha(X_1)]^{n-1}.$$
   On pourra écrire $\phi(X_T) = \sum_{n\geq 1} \phi(X_n)\mathbf{1}_{T=n}$.
   (c) En conclure que X_T admet f pour densité.
3. On cherche à simuler une variable aléatoire Y de densité
   $$f(x) = \frac{e^{-x^3}}{Z}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x), \quad \text{où} \quad Z = \int_1^\infty e^{-x^3}\, dx.$$

(a) Soit g la densité définie par $g(x) = x^{-2}\mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$. En étudiant la fonction $h : x \to x^2 e^{-x^3}$, déterminer $k \geq 1$ tel que $f(x) \leq kg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Déterminer G la fonction de répartition associée à la densité g.

(c) Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer ψ tel que $X = \psi(V)$ admet g pour densité.

(d) Expliquer pourquoi il n'est pas nécessaire de connaître Z pour appliquer la méthode de rejet.

Problème *(10 points)*

L'objectif de ce problème est d'étudier le processus de Galton-Watson. Ce modèle simple avait pour but d'étudier la disparition des patronymes dans les arbres généalogiques.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note ϕ sa fonction génératrice définie pour tout $s \in [0,1]$ par

$$\phi(s) = \mathbf{E}[s^X] = \sum_{n \geq 0} \mathbf{P}[X = n] s^n.$$

Considérons $(X_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et distribuées selon la loi de X. On pose $Z_0 = 1$ et on définit par récurrence sur $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} = X_{1,n+1} + \cdots + X_{Z_n,n+1} \quad \text{et} \quad Z_{n+1} = 0 \quad \text{si} \quad Z_n = 0.$$

La variable aléatoire Z_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et décrit le nombre d'individus à la génération n. Chaque individus i, $i = 1, \ldots, Z_n$, de la génération n engendre $X_{i,n+1}$ individus à la génération $n+1$ de façon indépendante à la fois vis à vis de la génération passée et vis à vis de ses congénaires.

Partie I : On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

1. Calculer $\mathbf{E}[Z_{n+1}|Z_n]$.
2. En déduire une expression de $\mathbf{E}[Z_{n+1}]$ en fonction de $\mathbf{E}[Z_n]$, puis de $\mathbf{E}[Z_n]$ en fonction de n.
3. Calculer $\mathbf{E}[Z_{n+1}^2|Z_n]$. En déduire $\mathbf{E}[Z_{n+1}^2]$ ainsi que $\mathbf{V}[Z_{n+1}]$.
4. Montrer que Z_n tend vers 0 en probabilité et dans $\mathbf{L}^2$ lorsque $\mathbf{E}[X] < 1$.

Partie II : On s'intéresse ici à la probabilité d'extinction. On ne suppose plus de condition de moment sur X.

À cette fin, on introduit la variable aléatoire $T = \inf\{n \geq 0 : Z_n = 0\}$ avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. On pose $p_{\text{ext}} = \mathbf{P}[T < \infty]$.

1. On note G_{Z_n} la fonction génératrice de Z_n.
   (a) Exprimer $G_{Z_{n+1}}$ en fonction de G_{Z_n} et ϕ.
   (b) En déduire que, pour tout $s \in [0,1]$, $G_{Z_n}(s) = \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ fois}}(s) = \phi^{(n)}(s)$.
2. Montrer que $\{T < \infty\} = \bigcup_{n \geq 0} \{Z_n = 0\}$ et que $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$.
3. Montrer que $s \to \phi(s)$ est continue et croissante sur $[0,1]$.
4. En déduire que $p_{\text{ext}} = \lim_{n \to \infty} \phi^{(n)}(0)$, puis que p_{ext} est un point fixe de ϕ *i.e.* $p_{\text{ext}} = \phi(p_{\text{ext}})$.
5. En considérant $q \in [0,1]$ un autre point fixe de ϕ, montrer que $p_{\text{ext}} \leq q$.
6. Montrer que si $\mathbf{P}[X = 0] = 0$ alors $Z_{n+1} \geq Z_n$ presque-sûrement. Que vaut p_{ext} ?
7. On suppose $\mathbf{P}[X = 0] > 0$ et on pose $m = \mathbf{E}[X] \in \overline{\mathbb{R}}_+$.
   (a) Soit $a, b, t \in [0,1]$, montrer que $\phi(ta + (1-t)b) \leq t\phi(a) + (1-t)\phi(b)$. Que cela signifie-t-il pour ϕ ?
   (b) Exprimer $\lim_{s \uparrow 1, s<1} \phi'(s)$ en fonction de m ? Justifier.
   (c) En déduire que si $m \leq 1$ alors $p_{\text{ext}} = 1$ alors que, si $m > 1$, $p_{\text{ext}} \in [0,1[$. On pourra se contenter d'une justification graphique illustrant les propriétés de ϕ dans les différents cas.
8. *Reproduction géométrique* : on suppose que $X + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
   (a) Pour quelles valeurs de p a-t-on extinction presque-sûre ? Interpréter.
   (b) Calculer p_{ext} dans le cas sur-critique *i.e.* lorsque $p_{\text{ext}} < 1$.