# Examen du 4 janvier 2017 - 2h30

***Le sujet comporte 2 pages.*** *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont interdits. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question précédente sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité de la rédaction, celle-ci doit être complète et synthétique. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

## Exercice 1 *(3 points)*

Soit $(X, Y)$ un vecteur gaussien centré tel que $\mathbf{E}(X^2) = 4$, $\mathbf{E}(Y^2) = 1$. On suppose de plus que $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Que vaut la covariance $\mathsf{Cov}(2X + Y, X - 3Y)$ ?
2. En déduire la covariance $\mathsf{Cov}(X, Y)$.
3. Déterminer la matrice de covariance de $(X, Y)$.
4. Montrer que le vecteur $(X + Y, 2X - Y)$ est gaussien puis déterminer sa matrice de covariance.

## Exercice 2 *(3 points)*

Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes, toutes deux de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Après avoir donner la densité du couple $(X, Y)$, montrer que la densité de $(X, X + Y)$ est donnée par
$$f_{(X,X+Y)}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y) \mathbf{1}_{[0,y]}(x), \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
2. En déduire la densité de $X + Y$.
3. Soit $v > 0$. Calculer la densité conditionnelle de $X$ sachant $X + Y = v$ puis identifier la loi.
4. En déduire $\mathbf{E}(X|X + Y)$.

## Exercice 3 *(4 points)*

On considère $X_1, X_2, X_3$ et $X_4$ quatre variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Y = X_1X_2 + X_3X_4$.

1. Montrer que la fonction caractéristique de $X_1X_2$ vaut
$$t \to \phi_{X_1X_2}(t) = \mathbf{E}(e^{itX_1X_2}) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$
2. En déduire la fonction caractéristique de $Y$.
3. Soit $Z$ une variable aléatoire de densité $x \to e^{-|x|}/2$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa fonction caractéristique.
4. Conclure.

## Problème 4 *(10 points)*

Dans tout le problème, log désigne le logarithme naturel et on convient que $\log 0 = -\infty$.

### Partie I

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées satisfaisant $\mathbf{E}(|\log(X_1)|^2) < \infty$. On pose $m = \mathbf{E}(\log(X_1))$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}(\log(X_1))$. Enfin, on définit, pour tout $n \geq 0$, la variable aléatoire $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1. Justifier la convergence presque-sûre de $\frac{1}{n}\log(Y_n)$ vers une limite que l'on précisera. En déduire la convergence presque-sûre de $Y_n^{1/n}$ vers une limite que l'on précisera.

2. On définit pour tout $n \geq 0$
$$Z_n = \frac{\log(Y_n) - nm}{\sigma\sqrt{n}}.$$
La suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en loi ? vers quelle limite ?
3. En déduire la convergence en loi de $(e^{-m\sqrt{n}} Y_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}})_{n\geq 1}$ vers la variable aléatoire $e^{\sigma\Gamma}$ où $\Gamma$ suit une loi normale centrée réduite. Justifier.

**Partie II**

Rappel :

*Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est lipschitzienne si il existe une constante $k \geq 0$ telle que $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.*

On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|$. Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{X}}$ une famille de fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour chaque $\varepsilon \in \mathbb{X}$, on note $c_\varepsilon$ la constante de Lipschitz, *i.e.* :
$$c_\varepsilon := \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d : x\neq y} \frac{\|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)\|}{\|x - y\|} = \inf\left\{k \geq 0 : \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\right\}.$$

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^d$ de loi $\mu$ et $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{X}$ indépendantes et identiquement distribuées. On suppose en outre que $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est indépendante de $X_0$. On définit la suite de vecteurs aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ par récurrence :
$$X_0 \sim \mu \quad \text{et pour tout} \quad n \geq 0 : \quad X_{n+1} = f_{\varepsilon_n}(X_n).$$

1. Pourquoi $X_{n+1} = f_{\varepsilon_n} \circ f_{\varepsilon_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\varepsilon_0}(X_0)$ est-elle de même loi que $\widetilde{X}_{n+1} = f_{\varepsilon_0} \circ f_{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ f_{\varepsilon_n}(X_0)$ ?
2. Pour les questions a), b) et c) suivantes, on suppose que $f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0 \in \mathbf{L}^1$.
   (a) Montrer que pour tout $k \geq 0$ :
   $$\|\widetilde{X}_{k+1} - \widetilde{X}_k\| \leq \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell} \|f_{\varepsilon_k}(X_0) - X_0\|$$
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et $p \geq 0$ :
   $$\|\widetilde{X}_{n+p} - \widetilde{X}_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell} \|f_{\varepsilon_k}(X_0) - X_0\|.$$
   (c) En déduire, sous la condition $\mathbf{E}(c_{\varepsilon_0}) < 1$, la convergence dans $\mathbf{L}^1$ de la suite $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ (on montrera que $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^1$).
3. Pour les questions a),b) et c) suivantes, on suppose que $f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0 \in \mathbf{L}^\infty$.
   (a) En utilisant l'inégalité de la question 2b), montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $\delta > 0$
   $$\mathbf{P}(\sup_{p\geq 0} \|\widetilde{X}_{n+p} - \widetilde{X}_n\| > \delta) \leq \mathbf{P}\left(\text{sup ess } \|f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0\|_\infty \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell} > \delta\right).$$
   (b) En utilisant le critère de Cauchy pour les séries numériques, montrer, sous la condition $\mathbf{E}(\log(c_{\varepsilon_0})) < 0$, que la série $\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{\ell=0}^{k} c_{\varepsilon_\ell}$ est convergente presque-sûrement et en probabilité (on pourra utiliser le résultat de la question 1. de la partie I).
   (c) En déduire que $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ converge presque-sûrement. On notera $\widetilde{X}_\infty$ la limite.
4. En supposant les conditions de la question 3 satisfaites, montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers la loi de $\widetilde{X}_\infty$.
5. Parmi les conditions $\mathbf{E}(c_{\varepsilon_0}) < 1$ et $\mathbf{E}(\log(c_{\varepsilon_0})) < 0$, laquelle est la plus faible ?