Partiel du 28 novembre 2017 - 1h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Question de cours *(2 points)*

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ une famille d'événements.

1. Donner la définition de l'indépendance (mutuelle) des événements $(A_n)_{n\geq 0}$.
2. Énoncer le deuxième lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 1 *(7 points)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 6e^{-3}e^{6x}\mathbf{1}_{]-\infty,1/2]}(x)$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que $Y = 1-2X$ suit une loi exponentielle de paramètre a que l'on précisera.
3. Calculer la fonction caractéristique associée à la loi de Y.
4. Déterminer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$ par deux méthodes différentes.

Même si vous n'avez pas trouvé la valeur de a dans la question 2., vous pouvez continuer l'exercice en gardant a.

Exercice 2 *(5 points)*

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien de moyenne μ et de matrice de covariance Σ données par

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi des variables aléatoires suivantes
   (a) X_1 ;
   (b) $X_2 + X_3$;
   (c) $2X_1 + X_2 + X_3$.
2. Calculer la probabilité $\mathbf{P}(2X_1 + X_2 - X_3 < 5)$.
3. Déterminer la loi de $Y = AX$ où
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *(8 points)*

Soient $a > 0$ et $\lambda > 0$. La loi Gamma de paramètres (a, λ), notée $\Gamma(a, \lambda)$, est définie à l'aide de la densité suivante

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \exp(-\lambda x) x^{a-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Après avoir donné la définition de la quantité $\Gamma(a)$, vérifier que f est bien une densité.
2. Déterminer l'espérance et la variance de cette loi.
3. On pose $Y = \lambda X$. Déterminer la loi de Y. Quelle loi reconnaissez-vous ?
4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(a, \lambda)$ et $\Gamma(b, \lambda)$.
   (a) Donner la densité du couple (X, Y).
   (b) Déterminer la densité du couple $(U, V) = (X + Y, X/(X + Y))$.
   (c) Que peut-on dire sur les variables aléatoires U et V ?
   (d) Identifier les densités de U et de V. Quelles lois reconnaissez-vous ?