Partiel du 9 novembre 2018 - 1h30

Le sujet comporte 1 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(8 points)*

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de densité $(x, y) \to ke^{-x}\mathbf{1}_{(0,x)}(y)$.

1. Déterminer la valeur de k.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Déterminer la loi du vecteur $\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)$.
4. Les variables $\frac{X-Y}{2}$ et $\frac{X+Y}{2}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 *(5 points)*

Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in (0, 1)$. On note Y et Z le quotient et le reste de la division euclidienne de $X + 2$ par 3.

1. Quelles sont les valeurs prises par les variables Y et Z ?
2. Déterminer les lois de Y et Z.
3. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 *(7 points)*

Soit $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ une fonction de répartition. Soit $p > 0$. On définit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$G(x) = \frac{1}{p} \int_x^{x+p} F(\xi)\ d\xi.$$

1. Montrer que G est une fonction de répartition.
2. Montrer que la loi caractérisée par G est continue.
3. Montrer que la loi caractérisée par G est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.