Examen du 27 novembre 2019 - 1h30

Le sujet comporte 1 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(6 points)*

Soit $U = (X, Y)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ admettant pour densité

$$f(x, y) = ke^{-x}\mathbf{1}_{0<|y|<x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer k.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Déterminer la loi de $\left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2}\right)$.

Exercice 2 *(6 points)*

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \sum_{i \geq 1} 2^{-i}\mathbf{1}_{[i^{-1},+\infty[}(t).$$

1. Montrer que F est une fonction de répartition.
2. Soit X de fonction de répartition F.
   (a) Calculer (sans justifier) :
      i. $\mathbf{P}(X < 0)$,
      ii. $\mathbf{P}(X \leq 0)$,
      iii. $\mathbf{P}(X \geq 1)$,
      iv. $\mathbf{P}(X > 1)$,
      v. $\mathbf{P}(0 \leq X < \frac{1}{2})$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de la *v.a.r.* $Y = 1/X$.
   (c) La *v.a.r* Y est-elle intégrable ?

Exercice 3 *(4 points)*

Soient X et Y deux *v.a.r.* indépendantes et identiquement distribuées. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la fonction de répartition de U et $\max(X, Y)$ en fonction de celle de X.
2. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.
   (a) Déterminer la loi de (U, V).
   (b) Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 *(4 points)*

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y respectivement de loi $\Gamma(a, \theta)$ et $\Gamma(b, \theta)$ avec $a, b, \theta > 0$. On rappelle la densité d'une loi $\Gamma(a, \theta)$:

$$f(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)}e^{-\theta x}x^{a-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On considère enfin une *v.a.r.* Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Calculer $\mathbf{E}[X^n]$.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Déterminer la loi de Z^2.
4. Soient $Z_1, \ldots, Z_d$ des variables aléatoires *i.i.d.* de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de $Z_1^2 + \cdots + Z_d^2$. De quelle loi s'agit-il ?