

Rattrapage du 1er mars 2018 - 2h30

Le sujet comporte 2 pages. Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont **interdits**. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question **précédente** sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être **justifié** de manière **complète et synthétique**. Le barème est donné à titre indicatif et pourra évoluer.

Question de cours (2 points)

Énoncer la (une) loi des grands nombres et le théorème central limite.

Exercice 1 (6 points)

La densité de la loi de Pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $c > 0$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{\alpha}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha+1} \mathbf{1}_{]c, \infty[}(x).$$

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles indépendantes de loi de Pareto de paramètres $\alpha > 0$ et $c > 0$.

1. Vérifier que h définit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X_1 .
3. On note $m_n = \min\{X_k : 1 \leq k \leq n\}$.
 - (a) Montrer que m_n suit une loi de Pareto dont on déterminera les paramètres.
 - (b) En déduire

$$\mathbf{P} \left(\bigcap_{k=1}^n \{X_k > \frac{3}{2}c\} \right).$$

4. On suppose désormais que $\alpha = 1$. On note

$$N_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{]3c/2, \infty[}(X_k).$$

- (a) Déterminer la loi de N_n .
- (b) Calculer $\mathbf{P}(N_n \geq 2)$.

Exercice 2 (3 points)

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On suppose de plus que $X \in \mathbf{L}^2$. Pour $n \geq 2$, on définit

$$Y_n = \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j}{\binom{n}{2}}.$$

1. Justifier la convergence presque-sûre de $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)_{n \geq 1}$. Déterminer sa limite.
2. Que peut-on en déduire sur $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)^2_{n \geq 1}$? Pourquoi ?
3. En développant $(\sum_{i=1}^n X_i)^2$, montrer que $(Y_n)_{n \geq 2}$ converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(X_1)^2$.

Exercice 3 (5 points)

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ une fonction de répartition. Soit $p > 0$. On définit $G_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$G(x) = \frac{1}{p} \int_x^{x+p} F(\xi) d\xi.$$

1. Montrer que G est une fonction de répartition.
2. Montrer que la loi caractérisée par G est diffuse.
3. Montrer que la loi caractérisée par G est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 4 (5 points)

Soient U et V deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même lois gaussienne centrée réduite.

1. Le but de cette question est de calculer la valeur de $\mathbf{E}(\max(U, V))$.
 - (a) Pourquoi $U\mathbf{1}_{U>V}$ et $V\mathbf{1}_{V>U}$ sont elles égales en distribution ?
 - (b) Montrer que $\mathbf{E}[\max(U, V)] = 2\mathbf{E}[U\mathbf{1}_{U>V}]$.
 - (c) En déduire que $\mathbf{E}[\max(U, V)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

2. Soit $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendant du vecteur $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

- (a) Soit $\rho \in [0, 1]$. On définit le vecteur $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ par

$$\begin{cases} X = U\sqrt{1-\rho} + W\sqrt{\rho} \\ Y = V\sqrt{1-\rho} + W\sqrt{\rho} \end{cases}.$$

Montrer que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien dont on précisera l'espérance et la matrice de covariance.

- (b) Déduire des questions précédentes que $\mathbf{E}[\max(X, Y)] = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$.

