Rattrapage du 19 février 2020 - 2h30

Le sujet comporte 2 pages. *Les documents de cours ainsi que les calculatrices sont* ***interdits****. Dans chaque exercice, il est possible d'utiliser un résultat d'une question* ***précédente*** *sans pour autant l'avoir démontrée. Une attention toute particulière devra être portée sur la qualité rédactionnelle. En particulier, sauf mention contraire explicite, tout résultat devra être* ***justifié*** *de manière* ***complète et synthétique****. Le barême est donné à titre indicatif et pourra évoluer.*

Exercice 1 *(6 points)*

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On rappelle que la densité de probabilité de U_1 est $x \to \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

1. On introduit les notations, pour tout $n \geq 1$:

$$Y_n = (U_n)^n, \quad V_n = \max\{Y_k : 1 \leq k \leq n\}, \quad W_n = \max\{Y_{2^k} : 1 \leq k \leq n\}, \quad V = \sup\{Y_k : k \geq 1\},$$
$$\text{et} \quad W = \sup\{Y_{2^k} : k \geq 1\}.$$

On notera par ailleurs $h_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ et on rappelle que $h_n \sim \ln n$.

(a) Déterminer, pour tout $n \geq 1$, la fonction de répartition F_n de Y_n.

(b) Déterminer, pour tout $n \geq 1$, la fonction de répartition H_n de V_n ainsi que la fonction de répartition G_n de W_n.

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comparer les événements $\{V \leq t\}$ et $\cap_{n\geq 1}\{V_n \leq t\}$.

(d) En déduire que $V = 1$ presque-sûrement.

(e) Montrer que W suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

(f) Montrer que la suite $((1 - V_n)\ln n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers T de loi exponentielle de paramètre 1.

2. Soit $\psi : [0,1] \to [0,1]$. On note

$$I = \int_0^1 \psi(x)\, \mathrm{d}x, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad X_n = \mathbf{1}_{\{U_{2n-1} < \psi(U_{2n})\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } U_{2n-1} < \psi(U_{2n}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que la suite

$$\left(\frac{1}{n}\left(\psi(U_1) + \cdots + \psi(U_n)\right)\right)_{n\geq 1}$$

converge presque-sûrement vers une limite que l'on précisera.

(b) Montrer que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

(c) Déterminer la loi de X_1 et en déduire que la suite

$$\left(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)\right)_{n\geq 1}$$

converge presque-sûrement. Préciser sa limite.

(d) Calculer $\mathbf{V}[\psi(U_1)]$ et $\mathbf{V}[X_1]$.

(e) Quelle méthode d'approximation conseilleriez-vous ?

Exercice 2 *(6 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Pour tout $n \geq 1$, on suppose que X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_n > 0$. On pose, pour $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad s_n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

1. Calculer la fonction caractéristique φ_n de S_n.

2. En déduire la loi de S_n ainsi que son espérance et sa variance.
3. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ converge presque-sûrement vers une variable aléatoire S à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.
4. On suppose que $\sum_{n\geq 1} \lambda_n < \infty$.
   (a) Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S_n]$.
   (b) En déduire que S est finie presque-sûrement.
   (c) Déterminer la loi de S.
5. On suppose désormais que $\sum_{n\geq 1} \lambda_n = \infty$.
   (a) Montrer que, pour tout $r \geq 0$, $\mathbf{P}[S > r] = 1$. Déterminer S.
   (b) Montrer que la suite de terme général $Y_n = (S_n - s_n)/s_n$, $n \geq 1$, converge presque-sûrement vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Déterminer la limite en loi de $(\sqrt{s_n}Y_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Pour la question 4.(b), on pourra utiliser l'inégalité $s_n^{-2}\lambda_n \leq s_{n-1}^{-1} - s_n^{-1}$, $n \geq 2$, ainsi que le lemme de Kronecker : si $(b_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels alors $\sum_{n\geq 1}(x_n/b_n) < \infty$ implique $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$.

Exercice 3 *(8 points)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi $\mathbf{P}[X_1 = 1] = \mathbf{P}[X = -1] = \frac{1}{2}$.
On pose

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 : \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Par ailleurs, pour $\alpha > 0$, on considère

$$M_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad M_n = (\cosh \alpha)^{-n} e^{\alpha S_n}.$$

1. (a) Calculer $\mathbf{E}[M_n]$ pour tout $n \geq 0$.
   (b) Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ converge presque-sûrement vers 0. *(On pourra utiliser le critère de Cauchy : si $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels alors $\limsup_{n\to\infty} |x_n|^{1/n} = \ell < 1$ implique que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.)*
   (c) La convergence a-t-elle lieu dans $\mathbf{L}^1$?
2. Soit $T = \inf\{n \geq 1 : S_n = 1\}$.
   (a) Vérifier que $\{\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\} \subset \{T < +\infty\}$.
   (b) Quelles valeurs peut prendre $\mathbf{P}[\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty]$?
   (c) Soit $a > 0$. Établir les inégalités

$$\mathbf{P}\left[\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right] \geq \mathbf{P}\left[\limsup\{S_n \geq a\sqrt{n}\}\right] \geq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}[S_n \geq a\sqrt{n}] = 1 - \Phi(a),$$

   où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
   (d) En déduire que $\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty$ presque-sûrement et que T est fini presque-sûrement.
3. On pose, pour tout $n \geq 1$, $Z_n = M_{n\wedge T}$ où $a \wedge b = \min(a, b)$ pour des réels a, b.
   (a) Montrer que $(Z_n \mathbf{1}_{T<\infty})_{n\geq 0}$ converge presque-sûrement vers $e^{\alpha}(\cosh \alpha)^{-T}\mathbf{1}_{T<\infty}$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 \leq Z_n \leq e^{\alpha}$. En déduire que la convergence précédente a également lieu dans $\mathbf{L}^1$.
4. (a) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, les variables aléatoires $M_{k-1}\mathbf{1}_{T\geq k}$ et M_k/M_{k-1} sont indépendantes.
   (b) Vérifier que

$$Z_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}\mathbf{1}_{T\geq k}\left(\frac{M_k}{M_{k-1}} - 1\right).$$

   Puis, montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\mathbf{E}[Z_n] = 1$.
   (c) En déduire que $\mathbf{E}[(\cosh \alpha)^{-T}] = e^{-\alpha}$.
   (d) Déterminer la fonction génératrice de T.