TD1 : Variables aléatoires réelles, vecteurs aléatoires

Exercice 1

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{e^x}{2}\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x) + \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$.

1. Montrer que F est une fonction de répartition d'une mesure de probabilité.
2. En cas de réponse positive à la question précédante, on se donne X une *v.a.r.* de fonction de répartition F. La variable X admet-elle une densité ?

Exercice 2

Soit X une *v.a.r.* de densité $f(x) = xe^{-x^2/2}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. La variable aléatoire $Y = X^2$ est-elle à densité ? Reconnaître la loi de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 3

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer les lois de e^X (cette loi est appelée loi log-normale), $|X|$ et X^2 (loi du $\chi^2(1)$). Pour ce faire, on déterminera les fonctions de répartition et les densités.
2. Calculer l'espérance et la variance de ces *v.a.r.*.
3. Calculer le moment d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) de X.

Exercice 4

Une *v.a.r.* X suit une loi de Weibull $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ si sa densité est égale à :

$$f_X(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad \alpha, \beta > 0.$$

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. On suppose que X modélise la durée de vie d'un composant électronique. On appelle taux de panne de X la fonction :

   $$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}, \quad x \geq 0.$$

   Expliciter h_X.
3. Calculer le moment d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) de X. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 5

Montrer qu'une *v.a.* X non identiquement nulle à valeurs positives suit une loi exponentielle si et seulement si elle est diffuse et sans mémoire, *i.e.* pour tous $s, t > 0$: $\mathbf{P}(X > s + t | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$.

Exercice 6

La loi bêta de 1ère espèce $\beta_I(a, b)$, $a, b > 0$, admet pour densité :

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad \text{où} \quad B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

1. Montrer que $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ pour tous $a, b > 0$.
2. Soit $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. Montrer que U et U^2 suivent des lois bêta particulières dont on précisera les paramètres.
3. Calculer le moment d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) de $X \sim \beta_I(a, b)$.
4. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 7

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. On s'intéresse à la *v.a.* $X^+ = \max(X, 0)$.

1. Que vaut $\int_{\mathbb{R}} h(x)\ d\delta_0(x)$?
2. À l'aide de la caractérisation par des fonctions tests, montrer que la loi de X^+ est un mélange d'une masse de Dirac en 0 et d'une loi à densité qu'on déterminera.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X^+.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ où $a > 0$ est un paramètre.

1. Montrer que f est une densité de probabilité. La loi associée est appelée loi de Cauchy (centrée) de paramètre $a > 0$ et est notée $\mathcal{C}(a)$.
2. Soit $X \sim \mathcal{C}(1)$. Montrer que X n'admet pas de premier moment.
3. Déterminer la loi de $\log |X|$.

Exercice 9

Soit X la durée de vie, en années, d'un composant électronique. On suppose que $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ (loi exponentielle), $\theta > 0$. En outre, l'exploitant a une politique le conduisant à changer systématiquement tout composant dont la durée de vie a atteint 5 ans. Soit Y la durée de vie d'un composant. Déterminer la loi de Y appelée loi tronquée.

Exercice 10

Soit $X \sim \mathcal{E}(\theta)$. Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la partie entière.

Exercice 11

Soit (X, Y) et (U, V) deux vecteurs aléatoires de densités respectives

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(1 + xy)\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(x, y) \quad \text{et} \quad g(u, v) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(u, v).$$

1. Vérifier que f et g sont bien des densités sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les densités marginales de (X, Y) et (U, V) notées respectivement f_X, f_Y, g_U et g_V.
3. Justifier que X et U d'une part, et que Y et V d'autre part ont même loi mais que, cependant, (X, Y) et (U, V) ne suivent pas la même loi.

Exercice 12 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

Soient X et Y deux variables aléatoires positives de carré intégrable définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\alpha \in (0, 1)$.

1. Sous quelle condition a-t-on $\mathbf{E}(X^2) = 0$? Dans la suite une telle situation est supposée exclue.
2. En considérant la fonction $\lambda \to \mathbf{E}[(X + \lambda Y)^2]$, retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\mathbf{E}(XY)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2).$$
3. Montrer que pour tout $\alpha \in (0, 1)$
$$(1 - \alpha)\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{[\alpha\mathbf{E}(X),\infty)}(X)).$$
4. En déduire
$$\mathbf{P}(X \geq \alpha\mathbf{E}(X)) \geq (1 - \alpha)^2 \frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

TD1 : Variables aléatoires réelles, vecteurs aléatoires

Exercice 1

1. La fonction F est croissante de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, continue à droite, limitée à gauche (càdlàg) — elle est en fait continue partout sauf en 0, l'ouverture/fermeture des bornes sur les indicatrices est alors primordiale —, en $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ et $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$. Donc F est une fonction de répartition.
2. La fonction F est dérivable sauf en 0. Un candidat naturelle pour la densité de X est sa dérivée : $F'(x)=\frac{1}{2}e^x\mathbf{1}_{(-\infty,0)}$ presque partout. Par contre, on vérifie que $\int F'(x)\,dx=\frac{1}{2}\neq 1$, donc X n'admet pas de densité. On aurait pu aussi remarquer que $\mathbf{P}(X=0)=\frac{1}{2}$ contredisant ainsi le fait que X admette une densité.

Exercice 2

1. La fonction f est mesurable positive et
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=\int_0^\infty xe^{-x^2/2}\,dx=[-e^{-x^2/2}]_0^\infty=1.$$
2. Utilisons la méthode des fonctions tests. Soit g une fonction mesurable bornée et calculons
$$\int g(y)f_Y(y)\,dy=\mathbf{E}(g(Y))=\mathbf{E}(g(x^2))=\int_0^\infty g(x^2)xe^{-x^2/2}\,dx.$$
On fait le changement de variables $y=x^2$, d'où $x=\sqrt{y}$ et $dx=dy/2\sqrt{y}$:
$$\int_0^\infty g(y)\frac{1}{2}e^{-y/2}\,dy.$$
On retrouve la densité d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.
3. On calcule à l'aide d'une intégration par partie :
$$\mathbf{E}(Y)=\int_0^\infty x\frac{1}{2}e^{-x/2}\,dx=[-xe^{-x/2}]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx=2.$$
De même,
$$\mathbf{E}(Y^2)=\int_0^\infty x^2\frac{1}{2}e^{-x/2}\,dx=[-x^2e^{-x/2}]_0^\infty+\int_0^\infty 2xe^{-x/2}\,dx=4\mathbf{E}(Y)=8.$$
D'où $\mathbf{V}(Y)=8-2^2=4$.

Exercice 3

1. Soit g une fonction mesurable bornée.
   —
   $$\mathbf{E}(g(e^X))=\int_{\mathbb{R}} g(e^x)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx.$$
   On pose $y=e^x$, $x=\ln y$ et $dx=dy/y$:
   $$\mathbf{E}(g(e^X))=\int_0^\infty g(y)\frac{e^{-(\ln y)^2}}{y\sqrt{2\pi}}\,dy.$$
   —
   $$\mathbf{E}(g(|X|))=\int_0^\infty g(x)2\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx.$$
   —
   $$\mathbf{E}(g(X^2))=2\int_0^\infty g(x^2)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx=\int_0^\infty g(y)\frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}\,dy.$$

   Nous pouvons également tenter de caractériser ces lois à la de la fonction de répartition, même si ce n'est la méthode la plus facile à mettre en oeuvre.

— Soit $t \in \mathbb{R}$ alors
$$F(t) = \mathbb{P}(e^X \leq t) = \mathbf{P}(X \leq \ln t) = \Phi(\ln t),$$
où Φ est la fonction de répartition d'une loi gaussienne centrée et réduite. Pour obtenir la densité, on calcule la dérivée :
$$F'(t) = \frac{e^{-(\ln t)^2/2}}{t\sqrt{2\pi}}.$$
On vérifie facilement que $\int_0^\infty F'(t)\ dt = F(\infty) - F(-\infty) = 1$.

— Pour $t \leq 0$, $\mathbf{P}(|X| \leq t) = 0$, sinon, pour $t > 0$, nous avons
$$F(t) = \mathbf{P}(|X| \leq t) = \Phi(t) - \Phi(-t).$$
Comme précédemment,
$$F'(t) = 2\frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{[0,\infty)}, \quad \text{et} \quad \int_0^\infty F'(t)\ dt = F(\infty) - F(0) = 1.$$

— Pour $t \leq 0$, $\mathbf{P}(|X^2| \leq t) = 0$. Pour $t > 0$,
$$F(t) = \mathbf{P}(|X|^2 \leq t) = \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t}).$$
De même,
$$F'(t) = 2\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}}\mathbf{1}_{(0,\infty)} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty F'(t)\ dt = 1.$$

2. Calculons

—
$$\mathbf{E}(e^X) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-(x-1)^2/2 + 1/2)}{\sqrt{2\pi}}\ dx = \sqrt{e}.$$
De même,
$$\mathbf{E}(e^{2X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x-2)^2/2 + 2)\ dx = e^2.$$
Enfin, $\mathbf{V}(e^|X|) = e^2 - e = e(e-1)$.

— On calcule
$$\mathbf{E}(|X|) = 2\int_0^\infty x\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\ dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}[-e^{-x^2/2}]_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$
On remarque $\mathbf{E}(X^2)$ n'est rien d'autre que la variance d'une gaussienne centrée et réduite, elle vaut donc 1.

— Ici encore, pour les mêmes raisons $\mathbf{E}(X^2) = 1$. Nous devons alculer $\mathbf{E}(X^4)$, on fait quelque chose de plus général à la question suivante.

3. Soit $k \geq 1$, si k est impair, alors $\mathbf{E}(X^k) = 0$. Soit k pair, c'est à dire $k = 2m$.
$$\mathbf{E}(X^{2m}) = \int_{\mathbb{R}} x^{2m}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^{2m-1}\ d\left(-e^{-x^2/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[-x^{2m-1}e^{-x^2/2}]_{-\infty}^{\infty} + \frac{2m-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^{2m-2}e^{-x^2/2}\ dx.$$
Ainsi, $\mathbf{E}(X^{2m}) = (2m-1)\mathbf{E}(X^{2m-2}) = \frac{(2m)!}{2^m m!}$. Par exemple $\mathbf{E}(X^4) = 3$ et $\mathbf{V}(X^2) = 1$.

Exercice 4

1. Pour $t \leq 0$, $\mathbf{P}(X \leq 0) = 0$. Si $t > 0$, alors
$$\mathbf{P}(X \leq t) = \int_0^t \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}\ dx = [-e^{-\alpha x^\beta}]_0^t = 1 - e^{-\alpha t^\beta}.$$

2. Il vient facilement que
$$h_X(x) = \frac{\alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}}{e^{-\alpha x^\beta}} = \alpha\beta x^{\beta-1}.$$

3. Soit $k \geq 1$, alors par le théorème de transfert
$$\mathbf{E}(X^k) = \int_0^\infty \alpha\beta x^{\beta-1+k}e^{-\alpha x^\beta}\ dx.$$
On fait le changement de variable $y = \alpha x^\beta$ d'où $x = \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{1/\beta}$, c'est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même et $dx = \frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}-1}\ dy$. Il vient :
$$\mathbf{E}(X^k) = \int_0^\infty \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{1-\frac{1}{\beta}+\frac{k}{\beta}}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}-1} e^{-y}\ dy = \alpha^{-k/\beta}\int_0^\infty y^{\frac{k}{\beta}}e^{-y}\ dy = \alpha^{-k/\beta}\Gamma\left(\frac{k}{\beta}+1\right) = \alpha^{-k/\beta}\frac{k}{\beta}\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right).$$

Exercice 5

Supposons d'abord que X suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Alors

$$\mathbf{P}(X > s+t|X > t) = \frac{\mathbf{P}(X > s+t)}{\mathbf{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = \mathbf{P}(X > s).$$

Réciproquement, supposons que X soit sans mémoire. Alors, pour tout entier $n \geq 0$ et $t > 0$:

$$\mathbf{P}(X > nt + t|X > n) = \mathbf{P}(X > t)\mathbf{P}(X > nt)$$

Ceci montre que $\mathbf{P}(X > nt) = (\mathbf{P}(X > t))^n$. Maintenant, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ nous obtenons

$$\mathbf{P}(X > p/q) = (\mathbf{P}(X > 1/q))^p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X > 1) = \mathbf{P}(X > q/q) = (\mathbf{P}(X > 1/q))^q.$$

Finalement, $\mathbf{P}(X > p/q) = (\mathbf{P}(X > 1))^{p/q} = e^{\frac{p}{q}\ln \mathbf{P}(X>1)}$.
Supposons un instant que $\mathbf{P}(X > 1) = 0$ alors pour tout $n \geq 1$, $0 = \mathbf{P}(X > 1) = \mathbf{P}(X > 1/n)^n$ donc $\mathbf{P}(X > 1/n) = 0$; il vient alors par postivité de X que

$$\mathbf{P}(X \neq 0) = \mathbf{P}(X < 0) + \mathbf{P}(X > 0) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}\{X > 1/n\}\right) \leq \sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(X > 1/n) = 0$$

impliquant $\mathbf{P}(X = 0) = 1$. Par conséquent si X est supposée positive et non identiquement nulle alors $\mathbf{P}(X > 1) > 0$.
Enfin, X est diffuse donc sa fonction de répartition et sa queue de distribution est continue. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on obtient par unicité du prolongement par continuité, que $\mathbf{P}(X > t)e^{t\ln \mathbf{P}(X>1)}$ pour tout $t \geq 0$ et X suit une loi exponentielle.
En fait, si X n'est pas supposée diffuse, elle suit une loi géométrique ou exponentielle suivant que $\mathbf{P}(X = 0) > 0$ ou non.

Exercice 6

1. Rappelons que $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\, dx$. Alors

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{a-1}s^{b-1}e^{-(t+s)}\, dsdt.$$

En faisant le changement de variable $(u, v) = (t+s, t/(t+s))$ ou de manière équivalente $(t, s) = (uv, u(1-v))$. Il est clair que $(t, s) = \phi(u, v) = (uv, u(1-v))$ est un C^1-difféomorphisme de $(0, \infty) \times (0, 1)$ dans $(0, \infty)^2$. La jacobienne de ϕ est donnée par

$$\mathsf{Jac}\phi(\mathsf{u},\mathsf{v}) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix},$$

et son déterminant est $-u$. D'où, par la formule du changement de variables

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty \int_0^1 (uv)^{a-1}u^{b-1}(1-v)^{b-1}e^{-u}u\, dvdu = \int_0^\infty u^{a+b-1}e^{-u}\, du \int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}\, dv = \Gamma(a+b)B(a, b).$$

2. Il est clair que $U \sim \beta_I(1, 1)$. Pour U^2, considérons g une fonction mesurable bornée

$$\mathbf{E}(g(U^2)) = \int_0^1 g(x^2)\, dx = \int_0^1 g(y)\frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

Il est clair que $B(1/2, 1) = 2$ et donc $U^2 \sim \beta_I(1/2, 1)$.

3. Nous avons

$$\mathbf{E}(X^k) = \frac{1}{B(a, b)}\int_0^1 x^{a-1+k}(1-x)^{b-1}\, dx = \frac{B(a+k, b)}{B(a, b)} = \frac{\prod_{\ell=0}^{k-1}(a+\ell)}{\prod_{\ell=0}^{k-1}(a+b+\ell)}.$$

4. Ainsi, $\mathbf{E}(X) = \frac{a}{a+b}$ et $\mathbf{E}(X^2) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$ si bien que $\mathbf{V}(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

Exercice 7

1. Par définition si $h = \mathbf{1}_A$ alors $\int h\, d\delta_0 = \delta_0(A) = \mathbf{1}_A(0) = h(0)$. Cette égalité est encore vraie si h est une fonction étagée et par convergence monotone si h est une fonction mesurable positive. Si h est intégrable, en décomposant $h = h^+ - h^-$ en parties positives et négatives, nous obtenons encore $\int h\, d\delta_0 = h(0)$.

2. Soit g une fonction mesurable bornée et calculons

$$\mathbf{E}(g(X^+)) = \int_{\mathbb{R}} g(x \vee 0) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\ dx = \frac{1}{2} g(0) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} g(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\ dx.$$

Ceci montre que la loi de X^+ est une combinaison convexe de δ_0 et de la loi de densité $\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

3. Il suffit de remplacer g par la fonction identité :

$$\mathbf{E}(X^+) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-x^2/2} \right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Exercice 8

1. La fonction f est clairement positive et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = \left[\frac{1}{\pi} \arctan(x/a) \right]_{-\infty}^{\infty} = 1.$$

2. Par définition

$$\mathbf{E}|X| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\ dx = \infty.$$

Pour la dernière égalité, il suffit de minorer à l'infini par une en $1/|x|$ qui n'est pas intégrable.

3. Soit g une fonction mesurable bornée. Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(g(\log|X|)) = \int_{\mathbb{R}} g(\log|x|) \frac{1}{\pi(1+x^2)}\ dx &= 2 \int_0^\infty g(\log x) \frac{1}{\pi(1+x^2)}\ dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \frac{e^y}{\pi(1+e^{2y})}\ dy = \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{1}{\pi \cosh(y)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\ dy.\end{aligned}$$

Exercice 9

Par définition, $Y = X \wedge 5$. Soit g une fonction mesurable bornée, alors

$$\mathbf{E}(g(Y)) = \int_0^\infty g(x \wedge 5) \theta e^{-\theta x}\ dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \theta e^{-\theta x} \mathbf{1}_{[0,5]}(x)\ dx + g(5) e^{-5\theta}.$$

Autrement dit, $Y \sim (1 - e^{-5\theta}) h + e^{-5\theta} \delta_5$ où h est la densité $h(x) = \frac{\theta e^{-5\theta}}{1 - e^{-5\theta}} \mathbf{1}_{[0,5]}(x)$.

Exercice 10

Soit g une fonction mesurable bornée. Calculons

$$\mathbf{E}(g(\lfloor x \rfloor)) = \int_0^\infty g(\lfloor x \rfloor) \theta e^{-\theta x}\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \int_k^{k+1} \theta e^{-\theta x}\ dx = (1 - e^{-\theta}) \sum_{k=0}^{\infty} g(k) e^{-k\theta}.$$

Ceci montre que $Y \sim \mathcal{G}(e^{-\theta})$.

Exercice 11

1. Les fonctions f et g sont positives. De plus :

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1 + xy)\ dxdy = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \left[x + \frac{x^2 y}{2} \right]_{-1}^{1}\ dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} 2\ dy = 1,$$

et

$$\int_{-1,1} \frac{1}{4}\ dudv = \frac{1}{4} \lambda_2([-1,1]^2) = 1.$$

2. Pour calculer la loi de X il suffit d'intégrer la densité jointe par rapport à sa seconde variable :

$$f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1 + xy)\ dy \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$$

Remarquons que la densité f est symétrique : $f(x,y) = f(y,x)$. Ainsi, $f_Y = f_X$.

D'un autre côté $g(u,v) = \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(u)}_{g_U(u)} \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(v)}_{g_V(v)}$.

3. On remarque que $f_U = f_V = g_U = g_V$ si bien que U, V, X, Y sont identiquement distribuées. Cependant, $f \neq g$ et donc (X, Y) et (U, V) ne sont pas identiquement distribuées. Ceci montre un point important, de la loi du couple nous pouvons toujours déduire les lois marginales ; par contre, les lois marginales ne suffisent pas en général à calculer la loi du couple.

Exercice 12 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

1. La variable aléatoire X^2 étant positive, l'inégalité de Markov appliquée à X^2 implique que $\mathbf{P}(X = 0) = 1$, autrement dit $X = 0$ presque sûrement.
2. On pose $g(\lambda) = \mathbf{E}[(X + \lambda Y)^2]$. Il est clair que g est positive sur $\mathbb{R}$. On développe le carré, on obtient
$$g(\lambda) = \mathbf{E}(X^2) + 2\lambda\mathbf{E}(XY) + \lambda^2\mathbf{E}(Y^2).$$
Si $\mathbf{E}(Y^2) = 0$ alors $Y = 0$ presque sûrement et l'inégalité de Cauchy-Schwartz est trivialement vérifiée. Supposons donc $\mathbf{E}(Y^2) > 0$. Puisque la fonction g est de signe constant, nous obtenons que le discriminant est négatif ou nul : $4\mathbf{E}(XY)^2 \leq 4\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2)$, d'où l'inégalité annoncée. Notons que le cas d'égalité signifie que g s'annule en un seul point λ_0 et dans ce cas $X + \lambda Y = 0$ presque sûrement, c'est à dire X et Y sont colinéaires dans $\mathbf{L}^2$.
3. Soit $\alpha \in (0, 1)$ alors puisque X est positive
$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{[0,\alpha\mathbf{E}(X))}) + \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{[\alpha\mathbf{E}(X),\infty)}(X)) \leq \alpha\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{[\alpha\mathbf{E}(X),\infty)}(X)),$$
et l'inégalité suit immédiatement.
4. En appliquant Cauchy-Schwartz au second membre de l'inégalité de la question précédente, on obtient
$$(1 - \alpha)^2\mathbf{E}(X)^2 \leq \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{[\alpha\mathbf{E}(X),\infty)}(X))^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{P}(X \geq \alpha E(X)).$$
L'inégalité demandée suit trivialement.

TD2 : Indépendance

Exercice 1

Soit X une *v.a.r.* de densité
$$f_\theta(x) = c_\theta x \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
où $\theta > 0$ est fixé. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires *i.i.d.* de même loi que X. On pose :
$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$
La variable $\overline{X}_n$ est appelée moyenne empirique.

1. Déterminer la constante c_θ et la fonction de répartion F_θ de X.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$. En déduire $\mathbf{E}(\overline{X}_n)$ et $\mathbf{V}(\overline{X}_n)$.
3. Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et sa densité, si elle existe, g_n.
4. Calculer $\mathbf{E}(Y_n)$ et $\mathbf{V}(Y_n)$.

Exercice 2

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des *v.a.r. i.i.d.*. On note $\mu = \mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{V}(X_1) = \sigma^2$. La variance empirique est donnée par l'expression
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$
Montrer que
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$$
et exprimer l'espérance de S_n^2 en fonction de σ^2. (On pourra considérer dans un premier temps $\mu = 0$).

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme standard $\mathcal{U}_{[0,1]}$. Déterminer les densités des variables aléatoires suivantes $U = X + Y$, $V = X - Y$, $Z = XY$, $T = X/Y$ (*suggestion : on pourra commencer par déterminer les densités des couples* (U, V) *et* (Z, T)).

Exercice 4

Soient X et Y deux *v.a.r.* indépendantes de densités respectives
$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathbf{1}_{(-1,1)}(x) \quad \text{et} \quad g(y) = y e^{-y^2/2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y).$$
Montrer que $U = XY$ suit une loi centrée réduite. (On pourra considérer le changement de variables $(x, y) \to (u, v) = (xy, y)$).

Exercice 5 *(Extrait du partiel de novembre 2014)*

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y respectivement de loi $\Gamma(a, \theta)$ et $\Gamma(b, \theta)$ avec $a, b, \theta > 0$. On pose
$$U = X + Y \quad \text{et} \quad T = \frac{X}{X+Y}.$$
On donne également la densité d'une loi $\Gamma(a, \theta)$:
$$f(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} e^{-\theta x} x^{a-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer la densité du couple (U, T).
2. En déduire que U et T sont des variables aléatoires indépendantes.
3. Identifier les lois de U et T, et montrer que T suit une loi bêta (a, b) de densité
$$f_T(t) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(t).$$

4. Soit $Z = X/Y$. Déduire de ce qui précède que U et Z sont indépendantes, et calculer la densité de Z. *(Attention : si il est possible de répondre cette question sans utiliser les questions précédantes, c'est plus long)*

Exercice 6 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\beta_I(a,b)$ et $\beta_I(a+b,c)$ pour $a,b,c>0$. On rappelle que la densité d'une loi $\beta_I(a,b)$ est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

On cherche à montrer que $U = XY$ suit une loi $\beta_I(a,b+c)$. On rappelle également que

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx \quad \text{et} \quad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

1. Donner la densité du couple (X,Y).
2. Calculer, à l'aide d'un changement de variable, la densité $f_{(U,V)}$ du couple $(U,V) = (XY,Y)$.
3. Justifier que la densité f_U de $U = XY$ est donnée par la forme intégrale suivante

$$f_U(u) = \frac{1}{B(a,b)B(a+b,c)}\mathbf{1}_{[0,1]}(u)u^{a-1}\int_u^1 (v-u)^{b-1}(1-v)^{c-1}\,dv.$$

4. Conclure à l'aide d'un changement variable (unidimensionnel).

Exercice 7

Soit $X = (U,V)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de densité f_X. On considère $Y = (R,\Theta)$ ses coordonnées polaires.

1. Montrer que Y admet une densité f_Y que l'on explicitera en fonction f_X.
2. Application : Les véhicules spatiaux désirant s'arrimer à la Station Spatiale Internationale (ISS) s'appuient sur le système de guidage GPS pour la phase d'approche de la station. Cependant, à faible distance de l'ISS, les signaux émits par la constellation des satellites qui consistuent le système GPS sont fortement perturbés par des phénomènes de réflexions multiples sur la structure métallique de la station. L'onde électromagnétique reçue par le récepteur GPS du véhicule spatial se présente donc comme la superposition de deux ondes en quadrature dont les amplitudes U et V sont des variables aléatoires gaussienne $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ supposées indépendantes (pour des raisons d'isotropie). L'étude de l'amplitude $R = \sqrt{U^2+V^2}$ de l'onde reçue est de première importance pour assurer un guidage fiable lors de la manoeuvre d'arrimage.
   (a) À l'aide de la question 1, expliciter la densité du couple (R,Θ).
   (b) Montrer que R et Θ sont indépendantes.
   (c) Reconnaître la loi de Θ.
   (d) Donner la densité de R. Cette loi s'appelle loi de Rayleigh.
   (e) Calculer l'espérance et la variance de R.

Exercice 8 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit ϕ le C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi)$ dans $\mathbb{R}_*^2$ défini par $\phi(u,v) = (\sqrt{u}\cos(v), \sqrt{u}\sin(v))$. On pose $(U,V) = \phi^{-1}(X,Y)$. On se propose d'étudier la loi du couple (U,V).

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Exprimer $\mathbf{E}(g\circ\phi^{-1}(X,Y))$ en fonction des densités de X et Y notées f_X et f_Y respectivement.
2. À l'aide du changement de variable $(x,y) = \phi(u,v)$, montrer que

$$\mathbf{E}(g(U,V)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\frac{e^{-u/2}}{2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{(0,2\pi)}(v)\,dudv.$$

3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer les lois de U et de V.
5. Déterminer la loi de $1-\exp(-U/2)$.
6. Proposer une procédure permettant de simuler des paires de nombres aléatoires distribués selon une loi normale centrée réduite dans le plan à partir d'une source de nombres aléatoires de loi uniforme. Cette méthode est appelée méthode de Box-Müller.

Exercice 9 *(Extrait de l'examen de janvier 2009)*

Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur aléatoire de densité f définie pour pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = K \exp(6xy - 2x^2 - 5y^2)$$

1. Déterminer K.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 10

Soit $Y \sim \mathcal{E}(\theta)$ et ε une variable aléatoire indépendante de loi de Rademacher symétrique, *i.e.* $\mathbf{P}(\varepsilon = 1) = 1 - \mathbf{P}(\varepsilon = -1) = p$ avec $p = 1/2$. Montrer que la variable aléatoire $Z = \varepsilon Y$ est à densité et la déterminer. Cette loi est appelée loi exponentielle symétrique.

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $1/X$ suit une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$.
2. Si Y, Z sont deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, montrer que Y/Z suit une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$.

Exercice 12

Soient X_1 et X_2 deux *v.a.r.* indépendantes de lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

1. Déterminer les lois de $m := \min(X_1, X_2)$ et $M := \max(X_1, X_2)$.
2. Supposant que $\lambda_1 = \lambda_2$ montrer que m et $M - m$ sont indépendantes.

Exercice 13

Un singe tape au hasard sur un clavier une lettre ou un symbole et recommence une infinité de fois de façon indépendante. Montrer que, presque sûrement, il aura tapé en entier *Les Misérables* de Victor Hugo sans aucune faute de frappe. N'a-t-on pas un résultat plus fort encore ?

TD2 : Indépendance

Exercice 1

1. La fonction f_θ est positive, il s'agit de trouver c_θ telle que $\int f \, d\lambda = 1$. D'où
$$1 = c_\theta \int_0^\theta x \, dx = c_\theta \theta^2/2 \quad \Longrightarrow c_\theta = 2/\theta^2.$$
On déduit la fonction de répartition F_θ pour $t \in [0, \theta]$
$$F_\theta(t) = \frac{2}{\theta^2} \int_0^t x \, dx = \frac{t^2}{\theta^2}.$$
Pour $t < 0$, $F_\theta(t) = 0$ et pour $t > \theta$, $F_\theta(t) = 1$.
2. On calcule
$$\mathbf{E}(X) = \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta x^2 \, dx = \frac{2}{3}\theta, \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(X^2) = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta x^3 \, dx = \theta^2/2.$$
Aussi, $\mathbf{V}(X) = \theta^2/18$.
Nous avons facilement que $\mathbf{E}(\overline{X}_n) = \mathbf{E}(X)$ et par indépendence des X_n, $\mathbf{V}(\overline{X}_n) = \mathbf{V}(X)/n$.
3. Soit $t \in [0, \theta]$, alors par indépendence
$$G_n(t) = \mathbf{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq t) = [\mathbf{P}(X \leq t)]^n = F_\theta(t)^n.$$
Pour $t < 0$, $G_n(t) = 0$ et pour $t \geq \theta$, $G_n(t) = 1$. Un bon candidat pour la densité de Y_n est $G'_n(t) = n f_\theta F(t)^{n-1} = 2n\frac{x^{2n-1}}{\theta^{2n}}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$. Cette fonction est positive et
$$2\int_0^\theta \frac{x^{2n-1}}{\theta^{2n}} = 2n\left[\frac{x^{2n}}{2n\theta^{2n}}\right]_0^\theta = 1.$$
Ainsi, $g_n = G'_n$ est la densité de Y_n.
4. Nous avons $g_n(x) = 2n\frac{x^{2n-1}}{\theta^{2n}}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)$, ainsi
$$\mathbf{E}(Y_n) = 2n\int_0^\theta \frac{x^{2n}}{\theta^{2n}} \, d\theta = \frac{2n}{2n+1}\theta,$$
et
$$\mathbf{E}(Y_n^2) = 2n\int_0^\theta \frac{x^{2n+1}}{\theta^{2n}} \, dx = \frac{n}{n+1}\theta^2.$$
Finalement :
$$\mathbf{V}(Y_n) = \frac{n(2n+1)^2 - 4n^2(n+1)}{(2n+1)^2(n+1)}\theta^2 = \frac{n^2\theta}{(2n+1)^2(n+1)}.$$

Exercice 2

Il suffit de développer le carré :
$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2}{n}\overline{X}_n\sum_{i=1}^n X_i + \overline{X}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2.$$
Avec les notations de l'exercice,
$$\mathbf{E}(S_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i^2) - \mathbf{E}(\overline{X}_n^2) = \mu^2 + \sigma^2 - \mathbf{V}(\overline{X}_n) - \mu^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$
On peut montrer (et on montrera, c'est une application de la LGN) que S_n^2 converge presque sûrement vers σ^2, cependant, en moyenne S_n^2 sous-estime la variance théorique : on dit que S_n^2 est un estimateur consistant biaisé. Les logiciels donnent en général la variance non biaisée $\frac{n}{n-1}S_n^2$.

Exercice 3

Soit g une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}^2$. Notons que par indépendance, $f_{(X,Y)}(x,y) = \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y)$. Calculons

$$\mathbf{E}(g(X+Y, X-Y)) = \int_0^1 \int_0^1 g(x+y, x-y)\ dxdy.$$

On pose $(u,v) = \phi(x,y) = (x+y, x-y)$. C'est un changement de variable linéaire, inversible. L'application ϕ est en particulier un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. L'image de $[0,1]^2$ par ϕ est le carré $ABCD$ où $A = (0,0)$, $B = (1,-1)$, $C = (2,0)$ et $D = (1,1)$. On notera Δ ce carré. La formule du changement de variable donne :

$$\int_{[0,1]^2} g(x+y, x-y)\ dxdy = \int_\Delta g(u,v) |\mathsf{det}\ D\phi^{-1}(u,v)|\ dudv.$$

Or

$$D\phi^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |\mathsf{det}\ D\phi^{-1}(u,v)| = \frac{1}{2}$$

La densité jointe de (U,V) est donc $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_\Delta$.
On calcule la densité de U en intégrant $f_{(U,V)}$ par rapport à v :

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\mathbf{1}_\Delta(u,v) dv = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1]}(u) \int_{-u}^{u} dv + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[1,2]}(u) \int_{-2+u}^{2-u} dv = u\mathbf{1}_{[0,1]}(u) + (2-u)\mathbf{1}_{[1,2]}(u).$$

De façon similaire,

$$f_V(v) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}\mathbf{1}_\Delta(u,v) du = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,0]}(v) \int_{-v}^{2+v} du + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1]}(v) \int_{v}^{2-v} du = (1+v)\mathbf{1}_{[-1,0]}(v) + (1-v)\mathbf{1}_{[0,1]}(v).$$

Pour les variables Z et T nous procédons de la même façon :

$$\mathbf{E}(g(XY, X/Y) = \int_{[0,1]^2} g(xy, x/y)\ dxdy = \int_\Delta g(z,t) |\mathsf{det}\ D\phi^{-1}(z,t)|\ dzdt,$$

où $\phi(x,y) = (xy, x/y) = (z,t)$ et $\phi^{-1}(z,t) = (\sqrt{zt}, \sqrt{z/t}) = (x,y)$. L'image de $[0,1]^2$ par ϕ est un peu plus subtile. Soit $y \in (0,1]$ fixé, on remarque que $\phi([0,1] \times \{y\}) = \{(xy, x/y) : x \in [0,1]\}$. Autrement l'image est un segment de droite (c'est linéaire en la paramétrisation) d'extrêmités les points $(0,0)$ et $(y, 1/y)$. Ainsi, $\phi([0,1] \times (0,1])$ est la réunion de toutes les segments issus de l'origine et dont l'autre extrêmité parcourt la courbe de l'hyperbole sur $(0,1]$. Finalement, $\Delta = \phi((0,1)^2)$ est le domaine de $\mathbb{R}^2$ délimité par l'hyperbole $y \to 1/y$, l'axe des ordonnés et la droite issue de l'origine et de pente 1.
On remarque que ϕ est un C^1 difféomorphisme de $(0,1)^2$ dans $\Delta = (0,1) \times (0,\infty)$. De plus,

$$D\phi^{-1}(z,t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{z}} & \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{t}} \\ \frac{1}{2\sqrt{zt}} & -\frac{\sqrt{z}}{2t\sqrt{t}} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |\mathsf{det}\ D\phi^{-1}(z,t)| = \frac{1}{2t}.$$

Finalement, en utilisant Fubini, en intégrant par tranches verticales

$$\int_\Delta g(z,t) |\mathsf{det}\ D\phi^{-1}(z,t)|\ dzdt = \int_0^1 \int_z^{1/z} \frac{1}{2t}\ dtdz,$$

si bien que $f_{(Z,T)}(z,t) = \frac{1}{2t}\mathbf{1}_{[0,1]}(z)\mathbf{1}_{[z,1/z]}(t)$.
Commençons par la densité de Z, on obtient

$$f_Z(z) = \mathbf{1}_{[0,1]}(z) \int_z^{1/z} \frac{1}{2t}\ dt = -\ln(z)\mathbf{1}_{[0,1]}(z).$$

Remarquons au passage que

$$\int_0^1 -\ln(z)\ dz = [-z\ln(z) + z]_0^1 = 1.$$

On calcule la loi de T également en découpant le domaine en deux

$$f_T(t) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1]}(t) + \frac{1}{2t}\mathbf{1}_{[1,\infty]}(t) \int_0^{1/t} dt = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1]}(t) + \frac{1}{2t^2}\mathbf{1}_{[1,\infty]}(t).$$

Exercice 4

Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable positive, par indépendance de X et Y

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(h(XY,Y)) &= \int_{\mathbb{R}^2} h(xy,y)\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)ye^{-y^2/2}\ dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\int_{-v}^{v} h(u,v)\frac{v}{\pi\sqrt{v^2-u^2}}e^{-v^2/2}dudv \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{|u|}^{\infty} h(u,v)\frac{ve^{-v^2/2}}{\pi\sqrt{v^2-u^2}}\ dvdu\end{aligned}$$

La densité de XY est donnée par

$$L(u) = \int_{|u|}^{\infty}\frac{ve^{-v^2/2}}{\pi\sqrt{v^2-u^2}}\ dv.$$

On pose $t = \sqrt{v^2-u^2}$, on obtient $dt = \frac{v}{\sqrt{v^2-u^2}}dv$ et donc

$$L(u) = \frac{e^{-u^2/2}}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-t^2/2}\ dt = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ainsi, XY suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 5 *(Extrait du partiel de novembre 2014)*

1. La densité du couple (X,Y) est donnée par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}y^{b-1}e^{-\theta(x+y)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}(x,y).$$

   Soit g une fonction mesurable bornée, calculons :

$$\mathbf{E}(g(U,T)) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} g(x+y, x/(x+y))f_{(X,Y)}(x,y)\ dxdy.$$

   On fait le changement de variable $(u,v) = \phi(x,y) = (x+y, x/(x+y))$. On calcule $\phi^{-1}(u,v) = (uv, u(1-v)) = (x,y)$. On note que ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*\times(0,1)$ puis on calcule

$$D\phi^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ (1-v) & -u\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad |\mathsf{det}\ D\phi^{-1}(u,v)| = |-uv-u+uv| = u.$$

   Finalement,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(g(U,V)) = \int_0^1\int_0^{\infty} g(u,v)\frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(uv)^{a-1}u^{b-1}(1-v)^{b-1}e^{-\theta u}u\ dudv = \\ \int_0^1\int_0^{\infty}\frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}u^{a+b-1}e^{-\theta u}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\ dudv \\ = \int_0^1\int_0^{\infty}\frac{\theta^{a+b}}{\Gamma(a+b)}u^{a+b-1}e^{-\theta u}\frac{1}{B(a,b)}v^{a-1}(1-v)^{b-1}\ dudv\end{aligned}$$

2. De la question précédente, on observe que la densité de (U,V) est à variable séparées, elle s'écrit comme le produit de deux densités unidimensionelles.
3. On reconnaît la loi bêta pour V et la loi $\Gamma(a+b,\theta)$ pour U.
4. On remarque que $V = \frac{X}{X+Y} = \frac{Z}{Z+1}$ où de manière équivalente $Z = \frac{V}{1-V}$. Il est clair que puisque U et V sont indépendentes, U est indépendante de toute transformation de V d'où Z et U sont indépendantes. Si g est mesurable bornée, nous avons en posant $z = v/(1-v)$, $dv = dz/(z+1)^2$

$$\mathbf{E}(g(Z)) = \int_0^1 g(v/(1-v))\frac{v^{a-1}(1-v)^{b-1}}{B(a,b)}\ dv = \int_0^{\infty} g(z)\frac{z^{a-1}}{(z+1)^{a+b}}\ dz.$$

Exercice 6 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

1. On a

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y)\frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}y^{a+b-1}(1-y)^{c-1}}{B(a,b)B(a+b,c)}.$$

2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable positive,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(h(XY,Y)) &= \int_0^1 \int_0^1 h(xy,y) \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}y^{a+b-1}(1-y)^{c-1}}{B(a,b)B(a+b,c)}\ dxdy \\
&= \frac{1}{B(a,b)B(a+b,c)} \int_0^1 \int_0^v h(u,v) \left(\frac{u}{v}\right)^{a-1} \left(1-\frac{u}{v}\right)^{b-1} v^{a+b-1}(1-v)^{c-1}\ \frac{dudv}{v} \\
&= \frac{1}{B(a,b)B(a+b,c)} \int_0^1 \int_0^v h(u,v) u^{a-1}(v-u)^{b-1}v^{-2}(1-v)^{c-1}\ \frac{dudv}{v} \\
&= \frac{1}{B(a,b)B(a+b,c)} \int_0^1 \int_u^1 h(u,v) u^{a-1}(v-u)^{b-1}v^{-2}(1-v)^{c-1}\ dvdu
\end{aligned}$$

On reconnaît la densité annoncée en intégrant par rapport à v.

3. On pose $w = \frac{v-u}{1-u}$.

Exercice 7

1. On fait le changement de variable $(u,v) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
2. (a) C'est l'application de la question 1 pour (U,V) un couple de gaussiennes indépendantes.
   (b) Remarquer que la densié de (R,θ) est à variables séparées (s'écrit comme un produit de densité).
   (c) C'est une loi uniforme sur $[0, 2\pi)$.
   (d) Soit on intègre la marginale, soit on utilise l'indépendance pour identifier la densité marginale.
   (e) C'est des IPP en faisant apparaître à certains endroit l'intégrale d'une densité gaussienne.

Exercice 8 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

1. On a par indépendance
$$\mathbf{E}(g \circ \phi^{-1}(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\phi^{-1}(X,Y)) f_X(x) f_Y(y)\ dxdy$$
2. On calcule
$$D\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(v)}{2\sqrt{u}} & -\sqrt{u}\sin(v) \\ \frac{\sin v}{2\sqrt{u}} & \sqrt{u}\cos(v) \end{pmatrix} \implies |\mathsf{det}\ D\phi(u,v)| = \frac{1}{2}.$$
La formule du changement de variable implique
$$\mathbf{E}(g(U,V)) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(u,v) \frac{e^{-u}}{4\pi}\ dvdu.$$
3. La densité de (U,V) est à variables séparées si bien que U et V sont indépendantes.
4. Nous avons $U \sim \mathcal{E}(1/2)$ et $V \sim \mathcal{U}([0,2\pi])$.
5. Par un changement de variable unidimensionel
$$\mathbf{E}(g(1-e^{-U/2})) = \int_0^\infty g(1-e^{-u/2}) \frac{e^{-u/2}}{2}\ du = \int_0^1 g(t)\ dt.$$
On obtient $1 - e^{-U^2/2} \sim \mathcal{U}([0,1])$.
6. On est capable de simuler W, Z indépendantes et uniformes sur $[0,1]$, alors $\phi(-2\ln(1-W), 2\pi Z)$ est une gaussienne bivariée.

Exercice 9 *(Extrait de l'examen de janvier 2009)*

1. Puisque f est positive, calculons à l'aide Fubini :
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \exp(6xy - 2x^2 - 5y^2)\ dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp[-2(x-\frac{3}{2}y)^2] \exp[-\frac{1}{2}y^2]\ dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(x-3y/2)^2}\ dxdy = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi} = \pi.
\end{aligned}$$
D'où $K = 1/\pi$.

2. Nous avons :
$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ dx = \frac{e^{-y^2/2}}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2(x-3y/2)^2}\ dx = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$
Un calcul très simllaire en choisissant l'autre décomposition de Gauss pour la forme quadratique conduit à la densité de X.
3. Les variables X et Y sont clairement dépendantes car la densités du couple ne s'écrit pas comme le produit des densités.

Exercice 10

Soit g une fonction mesurable bornée, alors
$$\mathbf{E}(g(\varepsilon Y)) = \mathbf{P}(\varepsilon = 1)\int_0^\infty g(y)\theta e^{-\theta y}\ dy + \mathbf{P}(\varepsilon = -1)\int_{-\infty}^0 g(y)\theta e^{-\theta|y|}\ dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{1}{2}\theta e^{-\theta|y|}\ dy.$$

Exercice 11

1. Il s'agit de faire le changement de variable $y = 1/x$ qui est un C^1-difféormisphe de $\mathbb{R}^*$ dans lui-même :
$$\int_{\mathbb{R}} g(1/x)\frac{1}{\pi(1+x^2)}\ dx = \int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{1}{y^2}\frac{1}{\pi(1+y^{-2}}\ dy.$$
Ainsi, $1/X$ suit encore une loi de Cauchy.
2. On fait le changement de variable $(u,v) = (y, y/z)$ qui est un C^1-difféormorphisme de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ dans lui-même. On calcule
$$D\phi^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/v & -u/v^2 \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad |\mathsf{det}\ D\phi^{-1}(u,v)| = |u|/v^2.$$
La formule du changement de variable donne
$$\mathbf{E}(g(Y, Y/Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\frac{e^{-u^2/2-u^2/2v^2}}{2\pi}\frac{|u|}{v^2}\ dudv.$$
Pour calculer la loi de Y/Z il ne nous reste plus qu'à intégrer la densité de la loi jointe par rapport à u :
$$f_{Y/Z} = \frac{1}{v^2\pi}\int_0^\infty ue^{-\frac{u^2}{2}(1-1/v^2)}\ du = \frac{1}{\pi(1+v^2)}.$$

Exercice 12

1. Calculons la loi du couple $(X\wedge Y, X\vee Y)$. Soit g une fonction mesurable bornée :
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(g(X\wedge Y, X\vee Y)) &= \int_0^\infty\int_0^\infty g(x\wedge y, x\vee y)\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}\ dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} g(x,y)\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}\mathbf{1}_{0\le x\le y}\ dxdy + \int_{\mathbb{R}_+^2} g(y,x)\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y}\mathbf{1}_{0\le y\le x}\ dxdy.\end{aligned}$$
Ainsi la densité du couple est
$$f(x,y) = \mathbf{1}_{0\le x\le y}\lambda_1\lambda_2\left[e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y} + e^{-\lambda_2 x+\lambda_1 y}\right].$$
Nous pouvons désormais calculer la loi du min
$$g_m(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\int_x^\infty \lambda_1\lambda_2\left[e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y} + e^{-\lambda_2 x-\lambda_1 y}\right]dy = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}.$$
Ainsi le minimum suit une loi $\mathcal{E}(\lambda_1+\lambda_2)$.
Pour la loi du max
$$g_M(y) = 2\int_0^y \lambda_1\lambda_2\left[e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y} + e^{-\lambda_2 x-\lambda_1 y}\right]\mathbf{1}_{y\ge 0}\ dx = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\left[\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}[1-e^{\lambda_1 y}] + \lambda_1 e^{-\lambda_1 y}[1-e^{-\lambda_2 y}]\right].$$
2. Calculons la loi de $(m, M-m)$ en repartant de la densité jointe de (X,Y) car nous ne connaissons pas la densité de (m,M) mais seulement celles de ses marginales :
$$\mathbf{E}(g(m, M-m)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(s,t-s)2\mathbf{1}_{0\le s\le t}\lambda^2 e^{-\lambda(s+t)}\ dsdt = \int_{\mathbb{R}_+^2} g(u,v)2\lambda^2 e^{-2\lambda u-\lambda v}\ dudv$$
d'où l'on déduit l'indépedance des deux variables ($\mathbf{1}_{s\le t}$ a disparu).

Exercice 13

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des caractères et symboles disponibles et on désigne par $m = (x_1, \ldots, x_{n_0})$ la suite de caractères et symboles qui correspond aux Misérables. On désigne par X_i le i-ième caractère ou symbole tapé par le singe. La suite $(X_i)_{i\geq 1}$ est *i.i.d.* et X_1 suit une loi uniforme sur $\mathcal{A}$.
On note A l'événement "le singe écrit les Misirables sans faute de frappe". Mathématiquement, $A = \{\exists k \in \mathbb{N}^* : (X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_{k+n_0}) = m\}$. Son complémentaire s'écrit

$$A^{\complement} = \{\forall k \in \mathbb{N}^*, (X_k, \ldots, X_{k+n_0}) \neq m\}.$$

En posant

$$B = \{\forall k \in \mathbb{N}^*, (X_{kn_0+1}, X_{kn_0+2}, \ldots, X_{(k+1)n_0}) \neq m\}$$

et

$$B_1 = \{\forall k \in \{1, \ldots, n\}, (X_{kn_0+1}, X_{kn_0+2}, \ldots, X_{(k+1)n_0}) \neq m\},$$

nous obtenons, $A^{\complement} \subset B \subset B_n$. Nous avons évidemment $\mathbf{P}(A^{\complement}) \leq \mathbf{P}(B) \leq \mathbf{P}(B_n)$. Par indépendance,

$$\mathbf{P}(B_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}((X_{kn_0+1}, X_{kn_0+2}, \ldots, X_{(k+1)n_0}) \neq m) = \mathbf{P}((X_{kn_0+1}, X_{kn_0+2}, \ldots, X_{(k+1)n_0}) \neq m)^n = \left[1 - \left(\frac{1}{N}\right)^{n_0}\right]^n.$$

Il vient alors $\mathbf{P}(A^{\complement}) = 0$ d'où $\mathbf{P}(A) = 1$.

TD3 : Fonctions caractéristiques

Exercice 1

Déterminer la fonction caractéristique de X dans les cas suivants :

1. $\mathbf{P}_X = \delta_a$, $a \in \mathbb{R}$;
2. $\mathbf{P}_X = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$;
3. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$;
4. $\mathbf{P}_X = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \delta_n$;
5. $X \sim \mathcal{P}(\Theta)$;
6. $X \sim \mathcal{U}_{[-1,1]}$;
7. X admet pour densité $f_X(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{[-1,1]}$, $x \in \mathbb{R}$;
8. pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\mathbf{P}_X(B) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_B(0) + \frac{1}{4}\int_{[-1,1]} \mathbf{1}_B(x)\, dx;$$
9. $X \sim \mathcal{E}(\Theta)$.

Exercice 2

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la fonction caractéristique de $Y = X^+ = \max(X, 0)$.

Exercice 3

Soient X_1 et X_2 deux *v.a.* indépendantes de loi $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ où $p \in (0, 1)$. Montrer à l'aide des fonctions caractéristiques que $X_1 + X_2$ suit une binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Exercice 4 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

Soient $X_1, \cdots, X_n$, $n \geq 1$, des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$. Montrer en utilisant les fonctions caractéristiques que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

La loi normale est dite α-stable d'indice $\alpha = 2$.

Exercice 5 *(Extrait de l'examen de février 2017)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$.

1. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes et de même loi que l'on précisera.
2. Déterminer la loi de X/Y.

Exercice 6 *(Extrait du partiel de novembre 2013)*

On rappelle la densité et la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Soit $X \sim \mathcal{C}(1)$, que peut-on dire de son espérance ? de sa variance ? Justifier.
2. Montrer que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ alors $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ suit également une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. (Une telle loi est dite 1-stable).

Exercice 7

Soient $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de *v.a. i.i.d.* et N une *v.a.* à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_k)_{k \geq 1}$. On suppose que $\mathbf{E}(X_1^2) < \infty$ et $\mathbf{E}(N^2) < \infty$. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Calculer $\mathbf{E}(S_N)$ et $\mathbf{V}(S_N)$.
2. Calculer la foncton caractéristique de S_N et retrouver les résultats de la questions précédantes.

Exercice 8 *(Extrait de l'examen de janvier 2017)*

On considère X_1, X_2, X_3 et X_4 quatre variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = X_1X_2 + X_3X_4$.

1. Montrer que la fonction caractéristique de X_1X_2 vaut

$$t \to \phi_{X_1X_2}(t) = \mathbf{E}(e^{itX_1X_2}) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

2. En déduire la fonction caractéristique de Y.
3. Soit Z une variable aléatoire de densité $x \to e^{-|x|}/2$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa fonction caractéristique.
4. Conclure.

TD3 : Fonctions caractéristiques

Exercice 1

On calcule facilement :

1. $\phi_X(t) = e^{ta}$;
2. $\phi_X(t) = \cos(t)$;
3. $\phi_X(t) = (pe^{it} + (1-p))^n$;
4. $\phi_X(t) = \frac{e^{it}}{2-e^{it}}$;
5. $\phi_X(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}$;
6. $\phi_X(t) = \frac{\sin(t)}{t}$;
7. $\phi_X(t) = \frac{2(1-\cos(t))}{t^2}$;
8. $\phi_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{t}$;
9. $\phi_X(t) = \frac{\theta}{it-\theta}$.

Exercice 2

On calcule

$$\phi_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{itx - x^2/2}\, dx.$$

Notons $\phi(t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{itx} e^{-x^2/2}\, dx$. Alors ϕ est C^1 et sa dérivée est $\phi'(t) = \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} ixe^{itx}e^{-x^2/2}\, dx$. Une intégration par partie donne

$$\phi'(t) = \left[-i\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{itx}e^{-x^2/2}\right]_0^\infty - t\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{itx}e^{-x^2/2}\, dx = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} - t\phi(t).$$

Il s'agit donc de résoudre une EDO linéaire du premier ordre avec second membre constant. L'équation homogène a pour solution $\phi(t) = ke^{-\int_0^t s\ ds} = ke^{-t^2/2}$.
Pour l'équation avec second membre, on applique la méthode de la variation de la constante. On pose $y(t) = k(t)e^{-t^2/2}$ puis on calcule

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} = y'(t) + ty(t) = k'(t)e^{-t^2/2} - tk(t)e^{-t^2/2} + tk(t)e^{-t^2/2} \quad \Longrightarrow \quad k'(t) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{t^2/2}.$$

Ainsi, la solution de l'EDO avec secod membre est de la forme

$$\phi(t) = e^{-t^2}\left[k + i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{x^2/2}\, dx\right].$$

Comme $\phi(0) = 1$, on trouve $k = 1$ et donc $\phi(t) = e^{-t^2/2} + ie^{-t^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t e^{x^2/2}\, dx$.

Exercice 3

On rappelle que $\phi_{X_1}(t) = (1-p+pe^{it})^n$ et que les fonctions caractéristiques caractérisent la loi. Par indépendance,

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \mathbf{E}(e^{itX_1}e^{itX_2}) = \mathbf{E}(e^{itX_1})\mathbf{E}(e^{itX_2}) = (1-p+pe^{it})^{n+m},$$

où l'on reconnait la fonction caractéristique d'une $\mathcal{B}(n+m, p)$. Remarquons qu'il est primordiale que le paramètre p soit identique pour les deux variables aléatoires.

Exercice 4 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\phi_X(t) = e^{-t^2\sigma^2/2}$. Remarquons que $\frac{X_1-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et calculons

$$\mathbf{E}\left[\exp it\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^n \exp\frac{it}{\sqrt{n}}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)\right] = \phi_X(t/\sqrt{n})^n = e^{-t^2/2}.$$

Exercice 5 *(Extrait de l'examen de février 2017)*

1. Soit $t, s \in \mathbb{R}$ et calculons
$$\mathbf{E}(e^{it(X+Y)+is(X-Y)}) = \phi(t+s)\phi(t-s) = e^{-(t+s)^2\sigma^2/2}e^{-(t-s)^2\sigma^2/2} = e^{-t^2\sigma^2}e^{-s^2\sigma^2}.$$
On reconnaît le produit de deux fonctions caractéristiques d'une loi $\mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$ d'où $X+Y$ et $X-Y$ sont deux variables aléatoires *i.i.d.* de loi $\mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$.
2. En faisant le chagement de variable $(x, y) = (r\sin\theta, r\cos\theta)$, on calcule
$$\mathbf{E}(e^{itX/Y}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{itx/y}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\,dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{\mathbb{R}_+^*\times(-\pi,\pi)} e^{it\tan\theta}re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\,drd\theta.$$
Il vient alors par Fubini
$$\mathbf{E}(e^{itX/Y}) = \frac{1}{2\pi}\int_{(-\pi,\pi)} e^{it\tan\theta}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{it\tan\theta}\,d\theta,$$
par π-périodicité de la fonction tan. En posant $s = \tan\theta$ si bien que $\theta = \arctan s$ et $d\theta = \frac{ds}{1+s^2}$:
$$\mathbf{E}(e^{itX/Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its}\frac{ds}{\pi(1+s^2)} = e^{-|s|}.$$
On retrouve que $X/Y \sim \mathcal{C}(1)$.

Exercice 6 *(Extrait du partiel de novembre 2013)*

1. Il est connu que si X admet un moment d'ordre 1 alors la fonction caractéristique de X est $\mathcal{C}^1$. Il est clair que ϕ n'est pas dérivable en 0 donc X n'admet pas de moment d'ordre 1 : $\mathbf{E}|X| = \infty$. Comme $X \notin \mathbf{L}^1$, $X \notin \mathbf{L}^2$ par Cauchy-Schwartz.
2. Par indépendance
$$\mathbf{E}\left[e^{it\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}}\right] = \phi(t),$$
d'où le résultat.

Exercice 7

1. On calcule par Fubini (on utilise le fait que $X_1, N \in \mathbf{L}^1$) et en utilisant l'indépendance de N et $(X_k)_{k\geq 1}$.
$$\mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{1}_{N=n}S_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{E}(\mathbf{1}_{N=n}S_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(N=n)n\mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1).$$
De même, par Fubini (en utilisant que $X_1, N \in \mathbf{L}^2$)
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_N^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(N=n)\mathbf{E}[S_n^2] &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(N=n)[n\mathbf{E}(X_1^2) + n(n-1)\mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2)]\\ &= \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1^2) + \mathbf{E}(X_1)^2\mathbf{E}[N(N-1)].\end{aligned}$$
Finallement,
$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{E}(S_n^2) - \mathbf{E}(S_n)^2 &= \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1^2) + \mathbf{E}(X_1)^2\mathbf{E}[N(N-1)] - \mathbf{E}(N)^2\mathbf{E}(X_1)^2\\ &= \mathbf{E}(N)\mathbf{V}(X_1) + \mathbf{E}(X_1)^2\mathbf{V}(N).\end{aligned}$$
2. On note ϕ la fonction caracteristique de X alors par Fubini et indépendance
$$\psi(t) = \mathbf{E}[e^{itS_N}] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(N=n)\phi(t)^n = G_N\circ\phi(t),$$
où $G(s) = \mathbf{E}(s^N)$ est la fonction génératrice de N. Remarquons que ψ est C^2 comme la composée de deux fonctions C^2. Ainsi, S_N admet un moment d'ordre 2 et :
$$\psi'(t) = \phi'(t)G'(\phi(t)) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{E}(S_N) = -i\psi'(0) = -i\phi'(0)G'(1) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(N).$$
De même,
$$\psi''(t) = \phi''(t)G'(\phi(t)) + [\phi'(t)]^2 + G''(\phi(t))$$
d'où
$$\mathbf{E}(S_N^2) = -\psi''(0) = -\phi''(0)G'(1) - [\phi'(0)]^2G''(1) = \mathbf{E}(X_1^2)\mathbf{E}(N) + \mathbf{E}(X_1)^2\mathbf{E}[N(N-1)].$$
Le calcul se termine de la même manière que la question précédante.

Exercice 8 *(Extrait de l'examen de janvier 2017)*

1. On note f la densité de $\mathcal{N}(0,1)$. On calcule par indépendance

$$\phi_{X_1X_2}(t) \;=\; \mathbf{E}(e^{itX_1X_2}) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}(e^{itsX_2}) f(s)\ ds \;=\; \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2s^2/2} f(s)\ ds \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-s^2(1+t^2)/2}}{\sqrt{\frac{2\pi}{1+t^2}}}\ ds \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

2. Les variables X_1X_2 et X_3X_4 sont indépendantes d'où

$$\phi_Y(t) = \phi_{X_1X_2}(t)\phi_{X_3X_4}(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

3. On calcule

$$\phi_Z(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-|x|}\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{itx+x}}{it+1}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{itx-x}}{it-1}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{2}\frac{1}{it+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{it-1} = \frac{1}{1+t^2}$$

4. Ceci montre que Z et Y ont la même loi.

TD4 : Vecteurs gaussiens

Exercice 1 *(Extrait de l'examen de janvier 2017)*

Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré tel que $\mathbf{E}(X^2) = 4$, $\mathbf{E}(Y^2) = 1$. On suppose de plus que $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Que vaut la covariance $\mathsf{Cov}(2X + Y, X - 3Y)$?
2. En déduire la covariance $\mathsf{Cov}(X, Y)$.
3. Déterminer la matrice de covariance de (X, Y).
4. Montrer que le vecteur $(X + Y, 2X - Y)$ est gaussien puis déterminer sa matrice de covariance.

Exercice 2

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de *v.a.r. i.i.d.* de loi normale centrée et de variance $\sigma^2 > 0$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ par $X_n = \theta U_{n-1} + U_n$ pour tout $n \geq 2$ et $X_1 = U_1$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, $X = (X_1, \ldots, X_n)^*$ est une vecteur gaussien non dégénéré dont on précisera la densité, l'espérance et la matrice de covariance.

Exercice 3

On considère $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et une *v.a.* ε indépendante de X et de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$.

1. Montrer que la *v.a.* $Y = \varepsilon X$ est gaussienne et que les *v.a.* X et Y sont non corrélées.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Le couple (X, Y) est-il gaussien ?

Exercice 4

(Extrait du partiel de Décembre 2013)]
La fonction caractéristique d'une loi du Chi-deux à 1 degré de liberté est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par $\psi(t) = 1/(1 - 2it)^{1/2}$.
On considère trois *v.a.* indépendantes X, Y et Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Donner la loi de la variable aléatoire $U = X + Y + Z$.
2. Montrer que $(U, X - Y)$ est un vecteur gaussien dont on précisera l'espérance et la matrice de covariance. En déduire que U est indépendante des variables $X - Y$, $Y - Z$ et $Z - X$.
3. Montrer que les variables aléatoires $X + Y + Z$, $2X - Y - Z$ et $Y - Z$ sont indépendantes. Identifier les lois de $(2X - Y - Z)^2/6$ et de $(Y - Z)^2/2$.
4. Vérifier l'égalité
$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = \frac{1}{2}(2x - y - z)^2 + \frac{3}{2}(y - z)^2$$
pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ et en déduire l'expression de la fonction caractéristique de $V = (X - Y)^2 + (Y - Z)^2 + (Z - X)^2$.
5. Les variables $(X - Y)^2$, $(Y - Z)^2$ et $(Z - X)^2$ sont-elles indépendantes ?

TD4 : Vecteurs gaussiens

Exercice 1 *(Extrait de l'examen de janvier 2017)*

1. Comme il est supposé que $2X+Y$ et $X-3Y$ sont indépendantes, nous avons $\mathsf{Cov}\ (2X+Y, X-3Y) = 0$.
2. Par la question précédante, en développant la covariance on obtient
$$0 = \mathsf{Cov}(2X+Y, X-3Y) = 2\mathbf{E}(X^2) - 5\mathsf{Cov}(X,Y) - 3\mathbf{E}(Y^2),$$
d'où $\mathsf{Cov}(X,Y) = 1$.
3. La matrice de covariance s'écrit donc
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Le vecteur $(X+Y, 2X-Y)$ est gaussien par transformation linéaire du vecteur gaussien (X,Y). Plus précisément :
$$\begin{pmatrix} X+Y \\ 2X-Y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$
Il vient également que
$$\mathbf{E}\begin{pmatrix} X+Y \\ 2X-Y \end{pmatrix} = A\mathbf{E}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0,$$
et la matrice covariance est donnée par $A\Sigma A^*$, c'est à dire
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

En écrivant
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}.$$
Ceci montre que $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien d'espérance nulle et de matrice de covariance :
$$\sigma^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \theta & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \theta & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \theta \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 & \cdots & 0 \\ \theta & 1+\theta^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1+\theta^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \theta \\ 0 & \cdots & 0 & \theta & 1+\theta^2 \end{pmatrix} = \Sigma$$
On vérifie facilement que $\mathsf{det}\ \Sigma = \mathsf{det}\ AA^*\sigma^2 > 0$ et donc que la loi gaussienne est non dégénérée. De même, $\Sigma^{-1} = \sigma^{-2}(A^{-1})^*A^{-1}$. Pour une formule explicite de A^-1 on peut écrire $A^{-1} = (I+\theta E)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\theta^k E^k$ où E est la matrice avec des 1 sous la diagonale et des zéros partout ailleurs. Nous vérifions que cette matrice rest nilpotente d'ordre n et plus exactement $E^k = (e_{i,j}^{(k)})$ avec $e_{i,j}^{(k)} = 0$ sauf pour $j = k+i$ pour lequel cela vaut 1.

Exercice 3

1. Soit g une fonction continue bornée alors par indépendance
$$\mathbf{E}(g(Y)) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{\varepsilon=-1}g(-X) + \mathbf{1}_{\varepsilon=1}g(X)) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(g(-X)) + \frac{1}{2}\mathbf{E}(g(X)) = \mathbf{E}(g(X)),$$
car X et $-X$ ont même loi. Ainsi, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. On calcule
$$\mathsf{Cov}\ (X,Y) = \mathbf{E}(X\varepsilon X) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(-X^2) + \frac{1}{2}\mathbf{E}(X^2) = 0.$$

2. Si X et Y étaient indépendantes, alors le couple (X,Y) serait gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance l'identité. Par conséquent,
$$\phi_{(X,Y)}(s,t) = e^{-t^2/2}e^{-s^2/2}.$$
Or, un calcul très similaire à celui de la question précédante implique
$$\phi_{(X,Y)}(s,t) = \mathbf{E}(e^{itX+is\varepsilon Y}) = \frac{e^{-(t-s)^2/2} + e^{-(t+s)^2/2}}{2}.$$
En spécifiant $s = t = 1$, on obtient e^{-1} d'une part et $(1+e^{-2})/2$ d'autre part. C'est une contradiction.
3. Si (X,Y) est gaussien alors $X+Y$ est une variable aléatoire gaussienne. Or $X+Y = (1+\varepsilon)X$ et on constate que $\mathbf{P}(X(1+\varepsilon) = 0) = \frac{1}{2}$. Contradiction. **Remarque importante :** les notions de décorrélation et d'indépendance ne sont équivalentes que dans le cas où (X,Y) est un vecteur gaussien ; la normalité des marginales est insuffisante.

Exercice 4 *(Extrait du partiel de Décembre 2013)*

1. Il est bien connu que $U \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Nous avons $(U, X-Y)^* = A(X,Y,Z)^*$ si bien que $(U, X-Y)$ est un vecteur gaussien comme transformation linéaire d'un vecteur gaussien. Nous $\mathbf{E}((U,X-Y)^*) = A\mathbf{E}((X,Y,Z)^*) = 0$. Et la matrice de covariance est donnée par AA^* c'est à dire
$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Par conséquent, comme AA^* est diagonale, on conclut que U et $(X-Y)$ sont indépendants. En échangeant les rôles de X, Y et Z de manière convenable, on obtient également que U est indépendante de $Y-Z$ et $Z-X$.
3. Nous avons
$$\begin{pmatrix} X+Y+Z \\ 2X-Y-Z \\ Y-Z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$
Calculons
$$BB^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Là encore, la matrice de covariance est diagonale et (X,Y,Z) est gaussien donc les trois variables considérées sont indépendantes.
On remarque que en lisant la matrice de covariance que $\frac{2X-Y-Z}{\sqrt{6}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ demême que $\frac{Y-Z}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Leurs carrés suivent une loi du χ^2 à un degré de liberté.
4. En utilisant l'égalité et l'indépendance de $2X-Y-Z$ avec $Y-Z$:
$$\phi_V(t) = \psi(3t)\psi(3t) = \frac{1}{1-6it}$$
5. Etant donné que $X-Y$ suit une $\mathcal{N}(0,2)$, on déduit que $\frac{(X-Y)^2}{2} \sim \chi^2(1)$. Il en va de même pour $\frac{(Y-Z)^2}{2}$ et $\frac{(Z-X)^2}{2}$. Supposons l'indépendance des trois variables aléatoires alors $\frac{1}{2}V$ est la somme de trois $\chi^2(1)$ indépendantes si bien que $\phi_{\frac{1}{2}V}(t) = (1-2it)^{-3/2}$ or $\phi_{\frac{1}{2}V}(t) = \phi(t/2) = (1-3it)^{-1}$ par la question précédante. On obtient une contradiction.

TD5 : Convergences

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a.* de loi

$$\mathbf{P}_{X_n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\delta_0 + \frac{1}{2n^2}(\delta_{-n} + \delta_n).$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
2. Que dire de la convergence en moyenne quadratique ?

Exercice 2

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a. i.i.d.* positives admettant un premier moment. On note $\mathbf{E}(X_1) = m < \infty$ et on pose $U_n = X_n/n^2$, $n \geq 1$. La suite $(U_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement ? dans $\mathbf{L}^1$? En probabilité ? Si oui, vers quelle limite ?
2. On suppose désormais que les *v.a.* X_n admettent une densité

$$f(x) = \frac{c}{\pi(x^2+1)}\mathbf{1}_{x>0}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calculer la valeur de la constante c.

   (b) Est-on dans les hypothèses de la question 1 ?

   (c) Parmi les résultats obtenus à la question 1, lesquels sont toujours valides et pourquoi ?

Exercice 3 *(Extrait de l'examen de rattrapage de mars 2014)*

Soit X une *v.a.* de densité f_θ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\theta(x) = (1-\theta)\mathbf{1}_{[-1/2,0]}(x) + (1+\theta)\mathbf{1}_{[0,1/2]}(x),$$

où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de θ ?
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des *v.a. i.i.d.* de densité f_θ. Soient U_n et V_n les variables aléatoires définies par

$$U_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty,0]}(X_i) \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(0,\infty)}(X_i).$$

   (a) Montrer que U_n et V_n suivent des lois binomiales dont on précisera la valeur des paramètres. Les *v.a.* U_n et V_n sont-elles indépendantes.

   (b) Montrer que $(U_n - V_n)/n$ tends presque sûrement vers une valeur déterministe que l'on précisera.

   (c) Calculer $\mathbf{E}(U_n)$, $\mathbf{E}(V_n)$ et en déduire la limite de $\mathbf{E}((V_n - U_n)/n)$ quand $n \to \infty$. Ce résultat pouvait-il se déduire de la question précédente ?

   (d) Calculer $\mathbf{E}(U_n V_n)$ et $\mathbf{Cov}(U_n, V_n)$.

   (e) Montrer que $\mathbf{V}((U_n - V_n)/n)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Ce résultat implique-t-il celui de la question 3b ? En implique-t-il une forme plus faible (que l'on précisera alors) ?

   (f) Pour n grand, construire un intervalle de confiance pour θ de niveau de risque 5% à partir des X_i, $1 \leq i \leq n$, et un autre à partir des U_i, $1 \leq i \leq n$. Commenter. Quelle est l'utilité de supposer que n est grand ?

Exercice 4 *(Extrait du rattrapage de février 2017)*

Soit $(X_n)_{n\geq}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi de Bernoulli sur $\{-1, 1\}$ de paramètre $p \in (0,1)$. Autrement dit, $\mathbf{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_1 = -1) = p$. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$ alors $(|S_n|)_{n\geq 1}$ tend presque sûrement vers $+\infty$.
2. On considère désormais le cas $p = \frac{1}{2}$. Soit $\alpha > 0$.

   (a) Calculer $\mathbf{E}[e^{\alpha X_1}]$ puis $\mathbf{E}[e^{\alpha S_n}]$. En déduire que $\mathbf{E}[(\cosh\alpha)^{-n} e^{\alpha S_n}] = 1$.

(b) À l'aide de la loi forte des grands nombres montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{\alpha S_n}}{(\cosh\alpha)^n}\right]^{1/n} = \frac{1}{\cosh\alpha}.$$

En déduire que $(\cosh\alpha)^{-n}e^{\alpha S_n}$ converge vers 0 *p.s.*.

(c) Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de convergence dominée ?

Exercice 5

Sur l'espace de Borel standard $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$, on considère la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de *v.a.* définies pour $\omega\in[0,1]$ par

$$X_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\mathbf{1}_{(0,1/n)}(\omega).$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 mais ne tend pas vers 0 en moyenne quadratique.

Exercice 6 *(Extrait de l'examen de rattrapage de février 2015)*

On considère une machine soumise à des pannes. On note X_1 l'instant de la première panne et, pour $i\geq 2$, X_i le temps de fonctionnement entre la i-ième et $(i+1)$-ième panne. On note T_n l'instant de la n-ième intervention de la maintenance (supposée être réalisée sans délai si bien que $T_n = X_1+\cdots+X_n$). On suppose les *v.a.* X_i *i.i.d.*.

1. On note $N(t) = \max\{n\in\mathbb{N} : T_n\leq t\}$, $t\in\mathbb{R}_+$. Interpréter $N(t)$ dans le contexte de l'énoncé et montrer que pour tout entier $n\geq 0$ et $t\geq 0$, $\{N(t)<n\} = \{T_n>t\}$.
2. Justifier pour tout $t\geq 0$ la double inégalité

$$T_{N(t)}\leq t < T_{N(t)+1}.$$

3. (a) Montrer que, pour n donné, la famille d'événements $A_t = \{N(t)<n\}$ est décroissante en $t\geq 0$ pour l'inclusion, *i.e.* $s\leq t$ implique $A_t\subset A_s$.

   (b) En déduire que si $\mathbf{P}(A_t)\to 0$ lorsque $t\to\infty$ alors $\mathbf{P}(\cap_{t\geq 0}A_t) = 0$.
4. On suppose désormais que $\mathbf{E}(X_1) = m < \infty$.

   (a) Montrer que pour tout n entier, T_n admet un premier moment et en déduire que $\mathbf{P}(T_n>t)\to 0$ lorsque $t\to\infty$. Que peut-on en déduire sur le nombre de pannes quand t tend vers l'infini.

   (b) Montrer que T_n/n converge presque-sûrement vers une valeur à déterminer.

   (c) En déduire que la suite $T_{N(t)}/N(t)$ converge presque-sûrement vers m lorsque t tend vers l'infini (on pourra se contenter d'une heuristique).

   (d) Montrer que pour $t\in\mathbb{R}_+$

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)}\leq\frac{t}{N(t)}<\frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}\left(1+\frac{1}{N(t)}\right).$$

   (e) En déduire que $t/N(t)$ converge presque sûrement vers m et interpéter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a.* *i.i.d.* de carré intégrable. On pose $m=\mathbf{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}(X_1)$. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \quad\text{et}\quad Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k-\overline{X}_n)^2.$$

1. Calculer $\mathbf{E}(Z_n)$ (*(Ce calcul a déjà été effectué dans la feuille de TD 2.)*.
2. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers σ^2.

Exercice 8

On considère une suite de *v.a.* indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$ telles que, pour $n\geq 1$, $\mathbf{P}(X_n = n) = 1/n = 1-\mathbf{P}(X_n=0)$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.
2. On pose $Y_n = n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k$. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle vers 0 en probabilité ?
3. En utilisant le lemme de Cesàro, montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ ne peut converger presque sûrement.
4. Que dire de l'application du lemme de Cesàro à la convergence en probabilité ?

Exercice 9 *(Extrait du rattrapage de février 2017)*

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ (respectivement $(Y_n)_{n\geq 1}$) une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi commune la loi uniforme sur $[0,1]$ (respectivement de loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$).

1. La loi faible des grands nombres $\mathbf{L}^2$ s'applique-t-elle à la suite $(U_n)_{n\geq 1}$? Justifier.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \, dx_1 \ldots dx_n.$$

   On pourra montrer que cette intégrale est l'espérance d'une fonctionnelle de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.
3. Montrer que $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\alpha$.
4. Montrer que $(Z_n/n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une limite que l'on précisera.
5. En déduire, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f(k/n).$$

Exercice 10

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires *i.i.d.* de loi commune μ. On note F_n la fonction de répartition empirique associée et définie pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$ par

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[X_i,\infty)}(t).$$

Montrer que si F est la fonction de répartition de la loi μ, alors $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$ presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 *(extrait de l'examen de janvier 2014)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a.* : on suppose $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$; on suppose également que $m_n \to m$ et $\sigma_n \to \sigma$ quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
2. Que se passe-t-il si $\sigma_n \to 0$?

Exercice 12

1. On considère deux *v.a.r. i.i.d.* X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On pose $Z = X - Y$ et on note ϕ_X (*resp.* ϕ_Z) la fonction caractéristique de X (*resp.* Z).
   (a) Montrer que $\mathbf{P}_Z = \mathbf{P}_{-Z}$ et que $\phi_Z(t) = |\phi_X(t)|^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $Z \in \mathbf{L}^2$ si et seulement si $X \in \mathbf{L}^2$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2(2\pi n x) & x \in [-1,1] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

   (a) Montrer que f_n est la densité d'une loi de probabilité $\mathbf{P}_n$; calculer l'espérance et la variance de $\mathbf{P}_n$ et calculer ϕ_n sa fonction caractéristique.
   (b) Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de *v.a.* de loi $\mathbf{P}_n$, alors la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ convege en loi vers la loi uniforme sur $[-1,1]$.
   (c) A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$? de la suite des variances des X_n ?
   (d) Montrer que si on suppose en outre l'indépendance des X_n alors la moyenne empirique converge en probabilité vers 0.
   (e) Trouver un exemple de loi symétrique μ pour laquelle il n'existe pas de couple (X,Y) de *v.a. i.i.d.* telles que $X - Y$ soit de loi μ.

Exercice 13 *(extrait de l'examen de janvier 2015)*

Soit (P) la propriété suivante : si X et Y sont deux *v.a.r. i.i.d.* de loi commune μ, $(X+Y)/\sqrt{2}$ est aussi de loi μ.

1. Montrer que la loi $\mathcal{N}(0,1)$ vérifie (P).
2. Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu(x) = 1$ et vérifiant (P).

(a) Montrer que si $X \sim \mu$ alors $\mathbf{E}(X) = 0$.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et toute suite $X_1, \dots, X_{2^n}$ de *v.a. i.i.d.* de loi μ, la *v.a.*

$$Y_n = 2^{-n/2} \sum_{i=1}^{2^n} X_i$$

est de loi μ.

(c) Montrer que la suite Y_n converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(d) Identifier μ.

Exercice 14 *(Extrait du rattrapage de février 2017)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose qu'il existe $(\alpha, \lambda) \in (0, \infty)^2$ tels que

$$\mathbf{P}(X_1 > x) \sim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{x^\lambda}.$$

La fonction de répartition F d'une loi de Fréchet de paramètre $(\alpha, \lambda) \in (0, \infty)^2$ est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$F(t) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t) e^{-\alpha t^{-\lambda}}.$$

Montrer que $Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \max(X_1, \dots, X_n)$ converge en distribution vers une loi de Fréchet.

Exercice 15 *(extrait de l'examen de janvier 2015)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit $\delta > 0$.

   (a) Montrer que si $\delta < 1/\lambda$ alors

   $$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n} \max_{1\leq k\leq n} X_k < \frac{1}{\lambda} - \delta\right) = \left(1 - e^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda} - \delta\right)\log n}\right)^n.$$

   (b) En déduire que

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n} \max_{1\leq k\leq n} X_k < \frac{1}{\lambda} - \delta\right) = 0.$$

   (c) Montrer que

   $$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n} \max_{1\leq k\leq n} X_k > \frac{1}{\lambda} + \delta\right) \leq n\mathbf{P}\left(X_1 > \left(\frac{1}{\lambda} + \delta\right)\log n\right).$$

   (d) En déduire que

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n} \max_{1\leq k\leq n} X_k > \frac{1}{\lambda} + \delta\right) = 0.$$

   (e) Conclure que la suite

   $$\left(\frac{1}{\log n} \max_{1\leq k\leq n} X_k\right)_{n\geq 1}$$

   converge en probabilité vers une limite à déterminer.

2. (a) Montrer que la fonction $G(t) = e^{-e^{-\lambda t}}$ est la fonction de répartition d'une loi de probabilité (appelée loi de Gumbel).

   (b) Montrer que si $t \in \mathbb{R}$ alors

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\log n}{\lambda} \leq t\right) = G(t).$$

   (c) En déduire que la suite de *v.a.*

   $$\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\log n}{\lambda}\right)_{n\geq 1}$$

   converge en loi vers une loi limite à déterminer.

Exercice 16 *(Extrait de l'examen de janvier 2017)*

Dans tout le problème, log désigne le logarithme naturel et on convient que $\log 0 = -\infty$.

Partie I

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées satisfaisant $\mathbf{E}(|\log(X_1)|^2) < \infty$. On pose $m = \mathbf{E}(\log(X_1))$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}(\log(X_1))$. Enfin, on définit, pour tout $n \geq 0$, la variable aléatoire $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

1. Justifier la convergence presque-sûre de $\frac{1}{n}\log(Y_n)$ vers une limite que l'on précisera. En déduire la convergence presque-sûre de $Y_n^{1/n}$ vers une limite que l'on précisera.
2. On définit pour tout $n \geq 0$
$$Z_n = \frac{\log(Y_n) - nm}{\sigma\sqrt{n}}.$$
La suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en loi ? vers quelle limite ?
3. En déduire la convergence en loi de $(e^{-m\sqrt{n}} Y_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}})_{n\geq 1}$ vers la variable aléatoire $e^{\sigma\Gamma}$ où Γ suit une loi normale centrée réduite. Justifier.

Partie II

Rappel :

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est lipschitzienne si il existe une constante $k \geq 0$ telle que $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.

On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|$. Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{X}}$ une famille de fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour chaque $\varepsilon \in \mathbb{X}$, on note c_ε la constante de Lipschitz, *i.e.* :

$$c_\varepsilon := \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d : x\neq y} \frac{\|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)\|}{\|x - y\|} = \inf\left\{k \geq 0 : \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\right\}.$$

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^d$ de loi μ et $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{X}$ indépendantes et identiquement distribuées. On suppose en outre que $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est indépendante de X_0. On définit la suite de vecteurs aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ par récurrence :

$$X_0 \sim \mu \quad \text{et pour tout} \quad n \geq 0 : \quad X_{n+1} = f_{\varepsilon_n}(X_n).$$

1. Pourquoi $X_{n+1} = f_{\varepsilon_n} \circ f_{\varepsilon_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\varepsilon_0}(X_0)$ est-elle de même loi que $\widetilde{X}_{n+1} = f_{\varepsilon_0} \circ f_{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ f_{\varepsilon_n}(X_0)$?
2. Pour les questions a), b) et c) suivantes, on suppose que $f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0 \in \mathbf{L}^1$.
   (a) Montrer que pour tout $k \geq 0$:
   $$\|\widetilde{X}_{k+1} - \widetilde{X}_k\| \leq \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell} \|f_{\varepsilon_k}(X_0) - X_0\|$$
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et $p \geq 0$:
   $$\|\widetilde{X}_{n+p} - \widetilde{X}_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell} \|f_{\varepsilon_k}(X_0) - X_0\|.$$
   (c) En déduire, sous la condition $\mathbf{E}(c_{\varepsilon_0}) < 1$, la convergence dans $\mathbf{L}^1$ de la suite $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ (on montrera que $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^1$).
3. Pour les questions a),b) et c) suivantes, on suppose que $f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0 \in \mathbf{L}^\infty$.
   (a) En utilisant l'inégalité de la question 2b), montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $\delta > 0$
   $$\mathbf{P}(\sup_{p\geq 0} \|\widetilde{X}_{n+p} - \widetilde{X}_n\| > \delta) \leq \mathbf{P}\left(\text{sup ess } \|f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0\|_\infty \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell} > \delta\right).$$
   (b) En utilisant le critère de Cauchy pour les séries numériques, montrer, sous la condition $\mathbf{E}(\log(c_{\varepsilon_0})) < 0$, que la série $\sum_{k=0}^\infty \prod_{\ell=0}^k c_{\varepsilon_\ell}$ est convergente presque-sûrement et en probabilité (on pourra utiliser le résultat de la question 1. de la partie I).
   (c) En déduire que $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ converge presque-sûrement. On notera $\widetilde{X}_\infty$ la limite.
4. En supposant les conditions de la question 3 satisfaites, montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers la loi de $\widetilde{X}_\infty$.
5. Parmi les conditions $\mathbf{E}(c_{\varepsilon_0}) < 1$ et $\mathbf{E}(\log(c_{\varepsilon_0})) < 0$, laquelle est la plus faible ?

TD5 : Convergences

Exercice 1

1. Soit $\varepsilon > 0$ alors $\mathbf{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \frac{1}{n^2}$ ainsi $\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) < \infty$ et X_n converge presque sûrement vers 0 par Borel-Cantelli.
2. On a$\mathbf{E}(X_n^2) = 1$ donc X_n ne converge pas vers 0 dans $\mathbf{L}^2$.

Exercice 2

1. Soit $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Markov implique
$$\sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(|U_n| > \varepsilon) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{m}{n^2\varepsilon} < \infty$$
donc U_n converge presque sûrement vers 0, *a fortiori* elle converge en probabilité. Enfin, $\mathbf{E}|U_n| = \mathbf{E}X_1/n^2$ qui tends vers 0 quand n tends vers l'infini. Ainsi U_n converge dans $\mathbf{L}^1$ vers 0.
2. (a) On calcule facilement $\int_0^\infty \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{2}$ d'où $c = 2$.
   (b) Pas tout à fait car si X_1 est effectivement positive nous avons par contre $\mathbf{E}X_1 = \infty$.
   (c) Clairement $\mathbf{E}|U_n| = \infty$ pour tout $n \geq 1$ donc U_n ne converge pas vers 0 dans $\mathbf{L}^1$. D'autre part,
$$\mathbf{P}(|U_n| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(X_1 \geq n^2\varepsilon) = \int_{n^2\varepsilon}^\infty \frac{2dx}{\pi(1+x^2)} = 1 - \frac{2}{\pi}\arctan n^2\varepsilon = \frac{2}{\pi}\arctan \frac{1}{n^2\varepsilon}.$$
   Ainsi, U_n converge vers 0 presque sûrement et donc en probabilité.

Exercice 3 *(Extrait de l'examen de rattrapage de mars 2014)*

1. Une densité étant positive, on obtient que nécessairement $\theta \in [-1, 1]$, comme $-1, 1$ sont par hypothèse écartés, il vient $\theta \in (-1, 1)$.
2. On calcule
$$\mathbf{E}(X) = (1-\theta)\int_{-1/2}^0 x\ dx + (1+\theta)\int_0^{1/2} x\ dx = -\frac{1-\theta}{8} + \frac{1+\theta}{8} = \frac{\theta}{4}.$$
3. (a) Les variables aléatoires U_n et V_n sont des sommes de Bernoulli indépendantes aussi $U_n \sim \mathcal{B}(n, \mathbf{P}(X \leq 0))$ et $V_n \sim \mathcal{B}(n, \mathbf{P}(X > 0))$. On calcule
$$p = \mathbf{P}(X \leq 0) = \frac{1-\theta}{2}, \quad \text{et} \quad 1-p = \mathbf{P}(X > 0) = \frac{1+\theta}{2}.$$
   (b) Par la loi des grands nombres U_n/n et V_n/n converge respectivement vers p et $1-p$ si bien que $(U_n - V_n)/n$ converge presque sûrement vers $2p - 1 = -\theta$.
   (c) Nous avons $\mathbf{E}(U_n) = np$ et $\mathbf{E}(V_n) = n(1-p)$ si bien que $\mathbf{E}((V_n - U_n)/n)$ tends vers $1 - 2p = \theta$ lorsque $n \to \infty$. En appliquant le théorème de convergence dominée, la convergence considérée pouvait se déduire de la question précédante.
   (d) Comme $U_n + V_n = n$, $\mathbf{E}(U_nV_n) = \mathbf{E}(nU_n) - \mathbf{E}(U_n^2) = n^2p - np(1-p) - n^2p^2 = n(n-1)p(1-p)$. On déduit
$$\mathsf{Cov}\ (U_n, V_n) = \mathbf{E}(U_nV_n) - \mathbf{E}(U_n)\mathbf{E}(V_n) = n^2p - np(1-p) - n^2p^2 - n^2p(1-p) = -np(1-p).$$
   (e) On calcule
$$\begin{aligned}\mathbf{V}((U_n - V_n)/n) &= \frac{1}{n^2}\left[\mathsf{Cov}(U_n - V_n, U_n - V_n) = \mathbf{V}(U_n) + \mathbf{V}(V_n) - 2\mathsf{Cov}(U_n, V_n)\right] \\ &= \frac{2np(1-p) + 2np(1-p)}{n^2} = \frac{4p(1-p)}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$
   Nous avons $\lim \mathbf{E}(V_n - U_n)/n = \theta$ et $\lim \mathbf{V}((V_n - U_n)/n) = 0$, on en déduit que $(V_n - U_n)/n$ converge en probabilité vers θ.

(f) Nous avons calculé précédemment que $\mathbf{E}(X) = \theta/4$ or un estimateur consistant de la moyenne est la moyenne empirique. On peut donc considérer

$$\hat{\theta} = \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i.$$

Alors $\hat{\theta}$ converge presque sûrement vers θ par la loi des grands nombres et le TCL implique :

$$\sqrt{n}\frac{\hat{\theta}-\theta}{4\sigma} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Le problème est qu'on ne connaît pas σ, l'écart-type de X, c'est en réalité une fonction de θ le paramètre inconnu. On remplace donc σ par son estimation $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}.$$

Il est facile de voir en développant le carré que $\hat{\sigma}$ converge presque sûrement vers σ. Puis le lemme de Slutsky implique que

$$\sqrt{n}\frac{\hat{\theta}-\theta}{4\hat{\sigma}} = \sqrt{n}\frac{\hat{\theta}-\theta}{4\sigma}\frac{\sigma}{\hat{\sigma}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Ceci va permettre de construire un intervalle de confiance pour θ. On note $t_0 = 1,96$ alors

$$0.95 = \mathbf{P}\left(-t_0 \leq \sqrt{n}\frac{\hat{\theta}-\theta}{4\hat{\sigma}} \leq t_0\right) = \mathbf{P}\left(\hat{\theta} - \frac{4t_0\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta} + \frac{4t_0\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right).$$

Dans les questions précédentes, nous avons montré que U_n/n convergeait vers $p = \frac{1-\theta}{2}$. En ce sens,

$$\tilde{\theta} = 1 - \frac{2U_n}{n} = \frac{V_n - U_n}{n}.$$

est un estimateur consistant de θ. Encore une fois,

$$\sqrt{n}\frac{\frac{U_n}{n} - p}{p(1-p)} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1),$$

si bien que par la delta méthode

$$\sqrt{n}\frac{f(U_n/n) - f(p)}{f'(p)p(1-p)} = -\sqrt{n}\frac{\tilde{\theta}-\theta}{\frac{(1-\theta)^2(1+\theta)}{4}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1),$$

où $f(x) = 1 - 2x$. Là encore, le lemme de Slutsky permet de remplacer θ par $\tilde{\theta}$ au numérateur. D'où

$$0.95 = 0.95 = \mathbf{P}\left(\tilde{\theta} - \frac{t_0(1-\tilde{\theta})^2(1+\tilde{\theta})}{4\sqrt{n}} \leq \theta \leq \tilde{\theta} + \frac{t_0(1-\tilde{\theta})^2(1+\tilde{\theta})}{4}\right).$$

Exercice 4 *(Extrait du rattrapage de février 2017)*

1. Par la loi des grands nombres, lorsque $n \to \infty$, S_n/n converge presque sûrement vers $2p-1$. D4où l'on conclut facilement que $|S_n| \sim |2p-1|n$ et le résultat.
2. (a) Nous avons

$$\mathbf{E}(e^{\alpha X_1}) = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} = \cosh\alpha.$$

Puis, par indépendance, $\mathbf{E}(e^{\alpha S_n}) = (\cosh\alpha)^n$. On en déduire très facilement que $\mathbf{E}((\cosh\alpha)^{-1}e^{\alpha S_n}) = 1$, c'est la linéarité de l'intégrale.

(b)

$$\left[\frac{e^{\alpha S_n}}{(\cosh\alpha)^n}\right]^{1/n} = \frac{e^{\alpha S_n/n}}{\cosh\alpha} \longrightarrow_{n\to\infty} \frac{1}{\cosh\alpha}.$$

Comme $\cosh\alpha > 1$ dès que $\alpha \neq 0$, pour tout $\alpha \neq 0$, $(\cosh\alpha)^n e^{\alpha S_n} \sim (\cosh\alpha)^{-n}$.

(c) Si le théorème de convergence dominée était applicable alors

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}((\cosh\alpha)^{-1}e^{\alpha S_n}) = \mathbf{E}(\lim_{n\to\infty}(\cosh\alpha)^{-1}e^{\alpha S_n}) = 0,$$

ce qui contredit le résultat de la questio 2.(a).

Exercice 5

Remarquons que X_n est positive pour tout $n \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\lambda(X_n > \varepsilon) = \lambda(\omega : \omega < \frac{1}{n} \wedge \varepsilon^{-1}) \sim \frac{1}{n}.$$

Ceci montre que X_n converge vers 0 en probabilité. Calculons d'autre part

$$\mathbf{E}(X_n^2) = \int_0^{1/n} \frac{d\omega}{\omega} = \infty.$$

Donc X_n ne converge pas en moyenne quadratique.

Exercice 6 *(Extrait de l'examen de rattrapage de février 2015)*

1. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $N(t)$ est le nombre de pannes avant le temps t. Cette égalité exprime simplement le fait que le temps de la n-ième panne est plus grand que t si et seulement si il y a eu moins de n pannes avant t.
2. Trivial.
3. (a) Soit $s \leq t$ alors toutes les pannes ayant eu lieu avant s ont eu lieu a fortiori avant t, c'est à dire $N(s) \leq N(t)$ d'où $A_t \subset A_s$.
   (b) Nous avons par décroissance que $\cap_{t\geq 0} A_t = \cap_{n\geq 0} A_n$ ce qui implique que $\cap_{t\geq 0} A_t$ est mesurable. De plus, par continuité à droite d'une probabilité :
   $$\mathbf{P}(\cap_{t\geq 0} A_t) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0.$$
4. (a) Puisque T_n est positive, on peut calculer $\mathbf{E}(T_n) = nm$ ce qui montre que T_n admet un premier moment. Par l'inégalité de Markov,
   $$\mathbf{P}(T_n > t) \leq \frac{nm}{t} \longrightarrow_{t\to\infty} .$$
   De là, avec la question 1., on obtient $\mathbf{P}(N(t) < n) = \mathbf{P}(T_n > t)$ d'où $N(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$.
   (b) La loi des grands nombres implique que T_n/m converge vers m presque sûrement.
   (c) Comme $N(t)$ tends vers l'infini, $\frac{T_{N(t)}}{N(t)}$ converge presque sûrement vers m par composition de limite.
   (d) Ce n'est ni plus ni moins que l'inéquation de la question 2. renormalisée par $N(t)$.
   (e) Par encadrement, on obtient facilement que $t/N(t)$ converge presque sûrement vers m lorsque t tends vers l'infini. On a montré que le nombre moyen de pannes sur un long intervalle $[0, t]$ est de l'ordre $1/m$, c'est inversement proportionnel au temps entre deux pannes.

Exercice 7

1. *Voir le calcul effectué dans la feuille de TD 2.*
2. De même, nous avons déjà montré que
   $$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - (\overline{X}_n)^2.$$
   En appliquant la loi des grands nombres aux deux termes, on trouve le résultat souhaité.

Exercice 8

1. Soit $\varepsilon > 0$, il s'agit de calculer $\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) = 1/n$ qui tends vers 0. D'où la convergence en probabilité.
2. Si Y_n tend vers 0 en probabilité alors Y_n converge vers δ_0 en loi dont la fonction caractéristique est $\varphi_{\delta_0}(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\limsup_{n\to\infty} |\varphi_{Y_n}(t_0)| < 1$ ce qui nous donnera la contradiction recherchée.
   À l'aide de l'indépendance des X_n, on calcule
   $$\varphi_{Y_n}(t) = \mathbf{E}\left[e^{itY_n}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[e^{itX_k/n}\right] = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{e^{itk/n}}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1 - e^{itk/n}}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} z_{k,n}(t).$$
   Par ailleurs,
   $$|z_{k,n}(t)|^2 = \left(1 - \frac{1 - e^{itk/n}}{k}\right)\left(1 - \frac{1 - e^{-itk/n}}{k}\right)$$
   $$= 1 - \frac{2(1-\cos(tk/n))}{k} + \frac{2(1-\cos(tk/n))}{k^2} = 1 - \frac{2(k-1)}{k^2}(1-\cos(tk/n).$$

De là, on considère $t \in [-\pi/2; \pi/2]$ et on utilise les inégalités de convexités $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$ et $\cos(x) - 1 \leq -\frac{2}{\pi}x$ pour $x \in [0, \pi/2]$. On obtient

$$|\varphi_{Y_n}(t)| = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 - \frac{2(k-1)}{k^2}(1-\cos(tk/n)\right)^{1/2}\right\}$$
$$\leq \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k^2}(\cos(tk/n)-1)\right\} \leq \exp\left\{-\frac{2}{\pi}|t|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k}\right\}.$$

En passant à la limite supérieure, le lemme de Cesàro donne, pour $t \in [-\pi/2, \pi/2]$,

$$\limsup_{n\to\infty} |\varphi_{Y_n}(t)| \leq \exp\left\{-\frac{2}{\pi}|t|\right\} < 1.$$

3. Supposons que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement. Alors sa limite ne peut être que 0 puisque c'est la limite de $(X_n)_{n\geq 1}$ en probabilité. Alors par définition, il existe $N \subset \Omega$ tel que $\mathbf{P}(N) = 0$ et $\omega \in N^{\complement}$ implique $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ est une suite réelle convergente. Le lemme de Cesàro implique que

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega).$$

Ceci montre que (Y_n) converge presque sûrement vers 0 donc en probabilité vers 0. Contradiction avec la question précédente.
4. Il n'est plus valide.

Exercice 9 *(Extrait du rattrapage de février 2017)*

1. La suite (U_n) est *i.i.d.* et U_1 admet un moment d'ordre 2. Ainsi la loi faible des grands nombres cadre $\mathbf{L}^2$ s'applique.
2. Il est clair que

$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n = \mathbf{E}\left[f\left(\frac{U_1 + \cdots + U_n}{n}\right)\right].$$

Par la loi faible des grands nombres, nous obtenons la convergence en probabilité de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

La convergence en probabilité vers une constante implique la convergence en loi vers la mesure de Dirac en cette constante. Par définition de la convergence en loi, puisque f est supposée bornée, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[f\left(\frac{U_1 + \cdots + U_n}{n}\right)\right] = f(1/2)$$

3. Rappelons la fonction caractéristique de la loi de Poissons

$$\phi_Y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{it})^k}{k!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} e^{\alpha e^{it}} = e^{-\alpha(1-e^{it})}.$$

Ceci permet de calculer la fonction caractéristique de Z_n par indépendance

$$\phi_{Z_n}(t) = \phi_Y(t)^n = e^{-n\alpha(1-e^{it})}.$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une poisson de paramètre $n\alpha$.
4. La loi faible des grands nombres cadre $\mathbf{L}^2$ implique que Z_n/n converge en probabilité vers $\mathbf{E}(Y_1) = \alpha$.
5. On remarque que

$$\sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f(k/n) = \mathbf{E}(f(Z_n/n)) \longrightarrow_{n\to\infty} f(\alpha),$$

par les mêmes arguments que pour la question 2..

Exercice 10

Il s'agit de la version simple de Glivenko-Cantelli, le vrai théorème de Glivenko-Cantelli est montrée dans le cours : pour tout $t \in \mathbb{R}$ on veut montrer que $F_n(t)$ converge presque sûrement vers $F(t)$. Dans ce cas, $F_n(t)$ converge presque-sûrement par la loi des grands nombres vers $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{[X_1,\infty)}(t)) = \mathbf{P}(X_1 \leq t)$. Ceci signifie que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un ensemble négilgeable N_t tel que $\omega \notin N_t$, $\lim_{n\to\infty} F_n(t, \omega) \to F(t)$.

Exercice 11 *(extrait de l'examen de janvier 2014)*

1. Soit g une fonction continue bornée et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$
$$\mathbf{E}(g(X_n)) = \mathbf{E}(g(\sigma_n Y + m_n)).$$
Nous avons $\sigma_n Y + m_n$ converge presque sûrement vers $\sigma Y + m$. Comme g est continue, $g(\sigma_n Y + m_n)$ converge presque sûrement vers $g(\sigma Y + m)$ et $\sup_{n\geq 0} |g(\sigma_n Y + m_n)| \leq \|g\|_\infty$. Le théorème de convergence dominée implique
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(g(X_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(g(\sigma_n Y + m_n)) = \mathbf{E}(g(\sigma Y + m)) = \mathbf{E}(g(X)).$$
Ceci n'est rien d'autre que la convergence en loi.
2. Lorsque $\sigma_n \to 0$, alors la loi limite est δ_m. Ceci implique la convergence en probabilité de X_n vers m.

Exercice 12

1. (a) Par hypothèse $\mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y = \mathbf{P}_Y \otimes \mathbf{P}_X$ si bien que $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{L}(Y,X)$. En notant $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $p(x,y) = x - y$, il vient alors $\mathcal{L}(p(X,Y)) = \mathcal{L}(p(Y,X))$. D'où $\mathbf{P}_Z = \mathbf{P}_{-Z}$.
Par indépendance de X et Y, nous avons $\phi_Z = \phi_X \phi_{-X} = \phi_X \overline{\phi}_X = |\phi_X|^2$.
(b) On suppose que $X \in \mathbf{L}^2$ alors par Cauchy-Schwartz $X \in \mathbf{L}^1$ et
$$\mathbf{E}(Z^2) = \mathbf{E}(X^2) - 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(Y^2) = 2(\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2) = 2\mathbf{V}(X).$$
Ainsi, $Z \in \mathbf{L}^2$.
Réciproquement, supposons $Z \in \mathbf{L}^2$ alors par le théorème de transfert et le théorème de Fubini pour les fonctions mesurables positives
$$\int Z^2 \, d\mathbf{P} = \int \int (x-y)^2 \; \mathbf{P}_X(dx)\mathbf{P}_Y(dy) < \infty.$$
Par conséquent, l'inégalité de Markov implique que $(X - y) \in \mathbf{L}^2$ pour $\mathbf{P}_Y$-presque tout $y \in \mathbb{R}$. Il est alors clair que $X \in \mathbf{L}^2$ — il suffit pour cela que $X - y \in \mathbf{L}^2$ pour un seul $y \in \mathbb{R}$.
2. (a) Il est clair que f_n est positive pour tout $n \geq 1$. Puis, on calcule
$$\int_{-1}^{1} \sin^2(2\pi n x) \; dx = 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \cos(4\pi n x) \; dx = 1.$$
Soit X_n une variable aléatoire de densité f_n. Notons que $|X_n| \leq 1$ presque sûrement, elle admet donc des moments de tout ordre. De plus, par parité
$$\mathbf{E}(X_n) = \int_1^1 x \sin^2(2\pi n x) \; dx = 0.$$
Enfin, à l'aide d'une IPP
$$\mathbf{V}(X_n) = \mathbf{E}(X_n^2) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \; dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \cos(4\pi n x) \; dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2 \sin(4\pi n x)}{4\pi n}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{x \sin(4\pi n x)}{4\pi n} \; dx.$$
À l'aide d'une seconde IPP :
$$\int_{-1}^{1} x\frac{\sin(4\pi n x)}{4\pi n} \; dx = \left[-\frac{x\cos(4\pi n x)}{16\pi^2 n^2}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{\cos(4\pi n x)}{16\pi^2 n^2} \; dx.$$
Finalement,
$$\mathbf{V}(X_n) = \frac{1}{3} - \frac{1}{8\pi^2 n^2}.$$
Enfin, calculons la fonction caractéristique :
$$\phi_n(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itx} \; dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itx}\cos(4\pi n x) \; dx = \frac{\sin(t)}{t} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itx}\cos(4\pi n x) \; dx.$$
Puis, notant $I_n = \int_{-1}^{1} e^{itx}\cos(4\pi n x) \; dx$, et intégrant deux fois par parties, on obtient :
$$\int_{-1}^{1} e^{itx}\cos(4\pi n x) \; dx = \underbrace{\left[\frac{\sin(4\pi n x)}{4\pi n x} e^{itx}\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \frac{it}{4\pi n}\int_{-1}^{1} e^{itx}\sin(4\pi n x) \; dx,$$

et
$$\int_{-1}^{1} e^{itx} \sin(4\pi nx)\, dx = \left[\frac{-\cos(4\pi nx)}{4\pi n} e^{itx}\right]_{-1}^{1} + \frac{it}{4\pi n} I_n.$$
Finalement,
$$I_n = -\frac{it}{4\pi n}\frac{-e^{it}+e^{-it}}{4\pi n} + \frac{t^2}{16\pi^2 n^2} I_n,$$
d'où
$$I_n\left(1 - \frac{t^2}{16\pi^2 n^2}\right) = -\frac{t\sin(t)}{8\pi^2 n^2}$$
et
$$I_n = \frac{2tsin(t)}{t^2 - 16\pi^2 n^2}.$$
Enfin,
$$\phi_n(t) = \frac{\sin(t)}{t}\left[1 - \frac{t^2}{t^2 - 16\pi^2 n^2}\right].$$

(b) Rappelons la fonction caractéristique de $\mathcal{U}[-1,1]$:
$$\phi(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{itx}\, dx = \frac{\sin(t)}{t}.$$
On constate donc que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ceci montre que X_n converge en loi vers la loi uniforme sur $[-1,1]$.

(c) La fonction $y \to \sin^2(2\pi y)$ est $\frac{1}{2}$-périodique. Par ailleurs, la suite nx mod $\frac{1}{2}$ est dense dans $[0, \frac{1}{2})$ dès que $x \notin \mathbb{Q}$ [1]. Ainsi, dès que $x \notin \mathbb{Q}$, l'ensemble des valeurs d'adhérences de $f_n(x)$ est $[0,1]$. Si $x \in \mathbb{Q}$, la suite nx mod $\frac{1}{2}$ est périodique et l'ensemble des valeurs d'adhérence de $f_n(x)$ est fini. En fait on voit facilement que $f_n(x)$ converge uniquement pour $x = 0$ mod $\frac{1}{2}$, seul cas où $f_n(x)$ ne possède qu'une valeur d'adhérence.
De plus $\lim_{n\to\infty} \mathbf{V}(X_n) = \frac{1}{3}$. Notons que cette variance limite n'est rien d'autre que la variance de la loi uniforme sur $[-1,1]$.

(d) L'indépendance des X_n et le fait que X_n est de carré intégrable pour tout n implique par Bienaymé-Tchebichev que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{1}{3n\varepsilon^2} \to 0.$$

(e) Une telle loi μ symétrique admet une fonction caractéristique positive. Or, si μ est la loi uniforme sur $[-1,1]$, alors $\hat{\mu}(t) = \frac{\sin(t)}{t}$. En particulier, $\hat{\mu}$ est négative sur $(-\pi, 0)$, c'est une contradiction avec la question 1.

Exercice 13 *(extrait de l'examen de janvier 2015)*

1. Si X, Y sont deux variables aléatoires gaussiennes centrées, réduites et indépendentes alors $(X+Y)/\sqrt{2}$ est une gaussienne et
$$\mathbf{E}((X+Y)/\sqrt{2}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}((X+Y)/\sqrt{2}) = (\mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y))/2 = 1.$$
D'où le résultat.

2. (a) L'existence d'un moment d'ordre 1 pour X est immédiate. Par hypothèse
$$1 = \mathbf{E}(X^2) = \frac{1}{2}\mathbf{E}[(X+Y)^2] \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X)^2,$$
d'où $\mathbf{E}(X) = 0$.

(b) On procède par récurrence, pour $n = 1$ c'est exactement l'hypothèse (P). Supposons donc $Y_n \sim \mu$. Alors $Y_{n+1} = \frac{Y_n + \tilde{Y}_n}{\sqrt{2}}$ où $\tilde{Y}_n = 2^{-n/2}\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} X_i$. En utilisant l'indépendance par paquet, nous avons que Y_n et $\tilde{Y}_n$ sont deux variables aléatoires indépendantes. Par hypothèse de récurrence, elles sont de même loi μ. La propriété (P) permet de conclure.

(c) C'est une application du TCL puisque les X_i sont *i.i.d.*, admettent un second moment et $\mathbf{E}(X_1) = 0$, $\mathbf{V}(X_1) = 1$.

(d) Pour tout $n \geq 1$, $Y_n \sim \mu$ et la convergence en loi précédente implique pour tout fonction g continue bornée
$$\mathbf{E}(g(Z)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(g(Y_n)) = \mathbf{E}(g(Y_1)), \quad \text{avec} \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$
Donc μ est la mesure gaussienne standard.

1. C'est l'ergodicité des rotations irrationnelles : sur $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$, on note $R_\alpha(x) = x + \alpha$ mod 1 ; cette application laisse invariante la mesure de Lebesgue, il faut alors montrer que ce système dynamique est mélangeant lorsque $\alpha notin \mathbb{Q}$; enfin, on peut déduire que tout ouvert est visité par l'orbite de R_α.

Exercice 14 *(Extrait du rattrapage de février 2017)*

Notons F_n la fonction de répartition de Z_n alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$F_n(t) = \mathbf{P}(Z_n \leq t) = \mathbf{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq n^{1/\lambda} t) = F(n^{1/\lambda} t)^n = \exp\{n \ln[1 - \mathbf{P}(X_1 > n^{1/\lambda} t)]\} \longrightarrow_{n\to\infty} e^{-\alpha t^{-\lambda}} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t).$$

Exercice 15 *(extrait de l'examen de janvier 2015)*

1. (a) De manière assez classique
$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n}\max_{1\le k\le n} X_k < \frac{1}{\lambda}-\delta\right) = \mathbf{P}\left(\max(X_1,\dots,X_n)\le(1/\lambda-\delta)\log n\right) = \left(1-e^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}-\delta\right)\log n}\right)^n.$$
(b) Par hypothèse, $1/\lambda-\delta>0$
$$\left(1-e^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}-\delta\right)\log n}\right)^n = \exp\left\{n\log\left[1-e^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}-\delta\right)\log n}\right]\right\}\sim_{n\to\infty}\exp\left\{-ne^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}-\delta\right)\log n}\right\}\to 0.$$
(c) Dire le maximum dépasse un certain seuil signifie qu'il existe un X_i qui le dépasse d'où le résultat.
$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n}\max_{1\le k\le n} X_k > \frac{1}{\lambda}+\delta\right)\le n\mathbf{P}\left(X_1>\left(\frac{1}{\lambda}+\delta\right)\log n\right).$$
(d) Nous avons
$$n\mathbf{P}\left(X_1>\left(\frac{1}{\lambda}+\delta\right)\log n\right) = n\exp\left\{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}+\delta\right)\log n\right\}\to 0.$$
(e) Soit $\delta\in(0,1/\lambda)$
$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{\log n}\max_{1\le k\le n} X_k-\frac{1}{\lambda}\right|>\delta\right) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n}\max_{1\le k\le n} X_k < \frac{1}{\lambda}-\delta\right)+\mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n}\max_{1\le k\le n} X_k > \frac{1}{\lambda}+\delta\right)\to 0.$$

2. (a) La fonction G est continue et croissante comme la composée de deux fonctions continues et décroissantes. De plus, $\lim_{t\to\infty} G(t)=1$ et $\lim_{x\to-\infty} G(t)=0$.
(b) Soit $t\in\mathbb{R}$ alors
$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le n} X_k-\frac{\log n}{\lambda}\le t\right) = \left(1-e^{-\lambda(t+\log(n)/\lambda)}\right)^n\sim\exp\left\{-e^{-\lambda t}ne^{-\log n}\right\}\to G(t).$$
(c) Cela montre la convergence vers la la loi de Gambel puisque la suite de fonction de répartition convergence ponctuellement vers G pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Des résultats de cet exercice, on obtient un nouvel estimateur du paramètre $1/\lambda$ de la loi exponentielle. Remarquons que la largeur de l'IC associé est de l'ordre $\log n$.

Exercice 16 *(Extrait de l'examen de janvier 2017)*

Partie I

1. Nous remarquons que
$$\frac{1}{n}\log Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log X_k\to\mathbf{E}(\log X_1),$$
c'est la loi forte des grands nombres cadre $\mathbf{L}^2$. En passant à l'exponentielle qui est une fonction continue, on obtient que $Y_n^{1/n}$ converge presque sûrement vers $e^{\mathbf{E}(\log(X_1))}$.
2. Il suffit d'appliquer le TCL :
$$Z_n=\frac{\log(Y_n)-nm}{\sigma\sqrt{n}}\Longrightarrow\mathcal{N}(0,1).$$
3. Le théorème de l'application continue implique $e^{\sigma Z_n}$ converge en loi vers $e^{\sigma\Gamma}$, or $e^{\sigma Z_n}=e^{-m\sqrt{n}}Y_n^{1/\sqrt{n}}$.

Partie II

1. Puisque les ε_n sont *i.i.d.* et indépendante de X_0, nous avons que $\mathcal{L}(\varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n,X_0)=\mathcal{L}(\varepsilon_n,\dots,\varepsilon_0,X_0)$. D'où $\mathcal{L}(X_n)=\mathcal{L}(\widetilde{X}_n)$.
2. (a) Montrer que pour tout $k\ge 0$:
$$\|\widetilde{X}_{k+1}-\widetilde{X}_k\| = \|f_{\varepsilon_0}\circ\cdots\circ f_{\varepsilon_k}(X_0)-f_{\varepsilon_0}\circ\cdots\circ f_{\varepsilon_{k-1}}(X_0)\|\le\prod_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k\|f_{\varepsilon_k}(X_0)-X_0\|.$$

(b) Soient $n, p \geq 0$

$$\|\widetilde{X}_{n+p} - \widetilde{X}_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|\tilde{X}_{k+1} - \tilde{X}_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell} \|f_{\varepsilon_k}(X_0) - X_0\|.$$

(c) On calcule

$$\mathbf{E}\|\tilde{X}_{n+p} - \tilde{X}_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell} \|f_{\varepsilon_k}(X_0) - X_0\| = \sum_{k=n}^{n+p-1} \mathbf{E}(c_{\varepsilon_0})^k \mathbf{E}[\|f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0\|],$$

en utilisant le caractère *i.i.d.* de la suite ε. On déduit

$$\sup_{p\geq 0} \mathbf{E}\|\tilde{X}_{n+p} - \tilde{X}_n\| \leq \frac{\mathbf{E}(c_{\varepsilon_0})^n}{1 - \mathbf{E}(c_{\varepsilon_0})} \mathbf{E}\|f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0\|.$$

D'où $\tilde{X}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}^1$.

3. (a) En utilisant la question 2b),

$$\sup_{p\geq 0} \|\widetilde{X}_{n+p} - \widetilde{X}_n\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_k} \|f_{\varepsilon_k}(X_0) - X_0\| \leq \left[\sum_{k=n}^{\infty} \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_k}\right] \mathsf{sup\ ess}\ \|f_{\varepsilon_k}(X_0) - X_0\|.$$

D'où l'on déduit

$$\mathbf{P}(\sup_{p\geq 0} \|\widetilde{X}_{n+p} - \widetilde{X}_n\| > \delta) \leq \mathbf{P}\left(\mathsf{sup\ ess}\ \|f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0\|_\infty \sum_{k=n}^{\infty} \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell} > \delta\right).$$

(b) La question I.1. implique la convergence presque sûre

$$\left(\prod_{\ell=0}^{n} c_{\varepsilon_n}\right)^n \longrightarrow \exp \mathbf{E}(\log c_{\varepsilon_0}) < 1$$

puisque $\mathbf{E}(\log c_{\varepsilon_0}) < 0$.

(c) Puisque la série $\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{\ell=0}^{n} c_{\varepsilon_n}$ est presque sûrement convergente, le reste de la série tend presque sûrement vers 0. Comme $\mathsf{sup\ ess}\ \|f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0\| < \infty$ par hypothèse, il vient que $\mathbf{P}(\sup_{p\geq 0} \|\widetilde{X}_{n+p} - \widetilde{X}_n\| > \delta)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. En particulier, $\widetilde{X}_n$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire que l'on notera $\widetilde{X}_\infty$.

4. Puisque pour tout $n \geq 0$, X_n et $\widetilde{X}_n$ ont même loi, on obtient pour toute fonction h continue bornée

$$\mathbf{E}(h(X_n)) = \mathbf{E}(h(\widetilde{X}_n)) \longrightarrow_{n\to\infty} \mathbf{E}(h(\widetilde{X}_\infty)),$$

par convergence dominée.

5. Par l'inégalité de Jensen, nous avons $\mathbf{E}(\log c_{\varepsilon_0}) \leq \log \mathbf{E}(c_{\varepsilon_0})$.

TD6 : Espérances Conditionelles

Exercice 1 *(Extrait de l'examen de rattrapage de mars 2013)*

Soit X une variable aléatoire intégrable, de fonction de répartition F, et de densité f. Soit ξ une variable aléatoire indépendante de X de loi $\mathbf{P}_\xi = \frac{\delta_{-1}+\delta_1}{2}$. On pose $Y = X + \xi$.

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y \leq y}|\xi)$.
2. En déduire la fonction de répartition de Y.
3. La loi de Y est-elle à densité ? Si oui, la calculer.

Exercice 2 *(Extrait de l'examen de janvier 2013)*

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ de moyenne $m = (1, 0, 3)^*$ et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer le noyau de Σ.
   (b) La loi de X est-elle à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$?
   (c) Quel est le support de la loi de X ?
2. Calculer l'espérance conditionnelle de X_2 sachant X_1.
3. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x$.

Exercice 3 *(Extrait de l'examen de janvier 2014)*

Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_3)$.

1. Montrer que $(X, X+Y, X+Y+Z)$ est un vecteur gaussien dont on précisera la moyenne et la matrice de covariance.
2. (a) Montrer que le couple $(X, X + 2Y)$ admet une densité sur $\mathbb{R}^2$, calculer cette densité.
   (b) Calculer la densité de $X + 2Y$.
   (c) Soit $a \in \mathbb{R}$, calculer la densité conditionnelle de X sachant $X + 2Y = a$ et en déduire l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X|X + 2Y)$.

Exercice 4 *(Extrait de l'examen de rattrapage de mai 2013)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f définie par $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x)$. On note $S = X + Y$.

1. Déterminer la densité de la loi du couple (X, S).
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant S.
3. Calculer $\mathbb{E}(X|S)$.

Exercice 5

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson. Déterminer la loi de X_j sachant $X_1 + \cdots + X_n$.

Exercice 6

Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de carré intégrable et satisfaisant

$$\mathbf{E}(X|Y) = Y, \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(Y|X) = X \quad \text{p.s.}.$$

1. Montrer que $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(Y^2)$.
2. En déduire la variance de $X - Y$ puis l'égalité $X = Y$ p.s..

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\theta > 0$. Déterminer $\mathbf{E}(X|X > t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Soient X, Y, Z trois *v.a.r.* telles que

— X est une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$;
— la densité de Y conditionnellement à X est donnée par

$$f_{Y|X=x}(y) = (y-x)e^{-(y-x)}\mathbf{1}_{[x,\infty)}(y);$$

— la densité de Z conditionnellement à (X,Y) est définie par

$$f_{Z|X=x,Y=y}(z) = (y-x)e^{-z(y-x)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z)\mathbf{1}_D(x,y),$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y > x\}$.

1. Déterminer la loi jointe de (X,Y,Z).
2. Quelle est la loi de Z conditionnellement à (X,Y) ? Calculer la loi de Z.
3. Déterminer la loi de (X,Y) sachant $Z = z$.
4. Calculer $\mathbf{E}(\sqrt{Y-X}|Z=z)$.
5. On pose $U = Y - X$ et $V = Z(Y-X)$. Déterminer la loi jointe de (X,U,V).
6. X, U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 *(Extrait de l'examen de janvier 2015)*

Soient X_1, X_2 et X_3 trois *v.a.r.* gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $U = 2X_1 - X_2 - X_3$, $V = X_1 + X_2 + X_3$ et $W = 3X_1 + X_2 - 4X_3$.

1. Déterminer les lois de U, V et W. Parmi les couples suivants, lesquels sont indépendants : (U,V), (U,W), (V,W) ?
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $W = aU + Z$ où Z est indépendante de U. En déduire $\mathbf{E}(W|U)$.

TD6 : Espérances Conditionelles

Exercice 1 *(Extrait de l'examen de rattrapage de mars 2013)*

1. Il vient immédiatement par indépendance de X avec ξ que $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y\le y}|\xi) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{X\le y-\xi}|\xi) = F(y-\xi)$.
   Plus généralement, on peut montrer que si deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors pour toute application h mesurable bornée $\mathbf{E}(h(X,Y)|Y) = \phi(Y)$ où $\phi(y) = \mathbf{E}(h(X,y)$. En effet, quitte à approcher l'application h par une suite d'applications mesurables bornées à variables séparées, on peut supposer $h = h_1 \times h_2$. Alors, par indépendance, $\phi(y) = h_2(y)\mathbf{E}(h_1(X))$. Soit alors Z une variable aléatoire Y-mesurable bornée, on calcule
   $$\mathbf{E}[Z\mathbf{E}(h(X,Y)|Y)] = \mathbf{E}[Zh_2(Y)\mathbf{E}(h_1(X)|Y)] = \mathbf{E}[Zh_2(Y)\mathbf{E}(h_1(X))],$$
   d'où $\mathbf{E}(h(X,Y)|Y) = h_2(Y)\mathbf{E}(h_1(X)) = \phi(Y)$.
2. Nous avons $\mathbf{P}(Y\le y) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y\le y}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y\le y}|\xi)) = \mathbf{E}(F(y-\xi)) = \frac{F(y-1)+F(y+1)}{2}$.
3. Un bon candidat pour la densité de Y est la dérivée de la fonction de répartition :
   $$g(y) = \frac{d}{dy}\mathbf{P}(Y\le y) = \frac{f(y-1)+f(y+1)}{2}.$$
   Il est immédiat que g est positive et que $\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy = 1$ par invariance par translation de la mesure de Lebesgue.

Exercice 2 *(Extrait de l'examen de janvier 2013)*

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ de moyenne $m = (1,0,3)^*$ et de matrice de covariance
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Il s'agit de résoudre :
   $$\begin{cases} 2x+2y-2z=0 \\ 2x+5y+z=0 \\ -2x+y+5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+2y-2z=0 \\ 3y+3z=0 \\ 3y+3z=0 \end{cases}.$$
   D'où l'on déduite $y=-z$ et $x=2z$, ainsi $\mathsf{Ker}\ \Sigma = \mathsf{Vect}\ (2,-1,1)$.
   (b) Comme Σ n'est pas inversible, X n'est pas à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$.
   (c) La variable X est supportée par $m + (\mathsf{Ker}\ \Sigma)^\perp$.
2. On remarque que $\mathbf{V}(X_1) = 2 \neq 0$ puis on calcule
   $$a = \frac{\mathsf{Cov}(X_2,X_1)}{\mathbf{V}(X_1)} = 1$$
   $$\mathbf{E}(X_2|X_1) = \mathbf{E}(X_2) + (X_1 - \mathbf{E}(X_1)) = X_1 - 1.$$
3. Le couple (X_1,X_2) a pour matrice de covariance
   $$\widetilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$
   qui inversible, d'inverse
   $$\widetilde{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \implies (x-m)^*\Sigma^{-1}(x-m) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_1-1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1-1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$
   Ainsi,
   $$f_{(X_1,X_2)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{6}}\exp\{-\frac{1}{12}[5(x-1)^2+2y^2-4xy+4y]\}.$$
   Finallement,
   $$f_{X_2|X_1=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_{X_1}(x)} = \frac{\sqrt{4\pi}}{2\pi\sqrt{6}}\exp\{-\frac{1}{12}[5(x-1)^2+2y^2-4xy+4y]+\frac{1}{4}(x-1)^2]\} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{[y-(x-1)]^2}{6}}.$$
   On reconnaît la densité d'une $\mathcal{N}(x-1,3)$.

Une autre méthode, plus éléguante, qui s'inspire de la preuve du théorème sur le conditionnement des vecteurs gaussiens : soit $a \in \mathbb{R}$ et posons $Z = X_2 - \mathbf{E}(X_2) - a(X_1 - \mathbf{E}(X_1)) = X_2 - aX_1 + a$. La variable Z est gaussienne et centrée. Il se trouve que l'on peut choisir a tel Z et X_1 soit indépendante. En effet, $0 = \mathsf{Cov}\ (Z, X_1) = \mathsf{Cov}\ (X_2, X_1) - a\mathbf{V}(X_1)$. Ainsi la condition d'indépendance est valide pour $a = \frac{\mathsf{Cov}\ (X_1,X_2)}{\mathbf{V}(X_1)} = 1$. Nous obtenons donc $X_2 = X_1 - 1 + Z$. Remarquons $\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X_1) + \mathbf{V}(X_2) - 2\mathsf{Cov}\ (X_1, X_2) = 3$. Considérons g une fonction continue bornée, alors par indépendance de Z et X_1

$$\mathbf{E}(g(X_2)|X_1) = \mathbf{E}(g(Z + X_1 - 1)|X_1) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}(g(X_2)|X_1 = x) = \mathbf{E}(g(Z + x - 1)),$$

d'où l'on déduit que $\mathcal{L}(X_2) = \mathcal{L}(Z + x - 1) = \mathcal{N}(x - 1, 3)$.

Exercice 3 *(Extrait de l'examen de janvier 2014)*

Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_3)$.

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad U = \begin{pmatrix} X \\ X+Y \\ X+Y+Z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

On déduit facilement que

$$\mathbf{E}(U) = O \quad \text{et} \quad \Sigma(U) = AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2. (a) On note $V = (X, X + 2Y)$ alors

$$V = B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On déduit

$$\mathbf{E}(V) = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma(V) = BB^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

On calcule $\mathsf{det}\ \Sigma(V) = 5 \neq 0$ donc V est à densité. On a de plus

$$f_V(x, y) = \frac{1}{4\pi} \exp -\frac{1}{8}(5x^2 - 2xy + y^2).$$

(b) La variable $X + 2Y$ est une gaussienne centrée de variance 5 donc

$$f_{X+2Y}(y) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-y^2/10}.$$

(c) Par la formule de Bayes appliquées aux densités

$$f_{X|X+2Y=a}(x) = \frac{f_V(x, y)}{f_{X+2Y}(a)} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(a - 5x)^2}{40} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x - a/5)^2}{2\sigma^2},$$

avec $\sigma^2 = 4/5$. Ainsi, la loi conditionelle de $X|X + 2Y$ est une gaussienne de moyenne $X + 2Y$ et de variance $4/5$.

Exercice 4 *(Extrait de l'examen de rattrapage de mai 2013)*

1. Il s'agit de déterminer la densité du couple $(X, X + Y)$, soit donc g une fonction continue bornée :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(g(X, X+Y)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, x+y) f(x) f(y)\ dxdy &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(u, v) e^{-u} e^{-v+u} \mathbf{1}_{0 \le u \le v}\ dudv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty g(u, v) e^{-v} \mathbf{1}_{0 \le u \le v}\ dudv, \end{aligned}$$

d'où $f_{(X,S)}(x, s) = \mathbf{1}_{0 \le x \le s} e^{-s}$.

2. On déduit de la question précédante la loi de S : $f_S(s) = se^{-s}\mathbf{1}_{s \ge 0}$. Par la formule de Bayes

$$f_{X|S=s}(x) = \frac{f_{(X,S)}(x, s)}{f_S(s)} = \frac{\mathbf{1}_{[0,s]}(x)}{s}.$$

Ainsi $\mathcal{L}(X|S) = \mathcal{U}([0, S])$.

3. On a clairement $\mathbf{E}(X|S) = S/2$.

Exercice 5

On pose

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \quad \text{et} \quad S_n^{(j)} = \sum_{k \neq j} X_k.$$

De même on pose $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$, ainsi $S_n \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $\lambda^{(j)} = \sum_{k \neq j} \lambda_k$ ainsi $S_n^{(j)} \sim \mathcal{P}(\lambda^{(j)})$. On cherche à calculer

$$\mathbf{P}(X_j = \ell | S_n = k) = \frac{\mathbf{P}(X_j = \ell, S_n = k)}{\mathbf{P}(S_n = k)} = \frac{\mathbf{P}(S_n^{(j)} = k - \ell)\mathbf{P}(X_j = \ell)}{\mathbf{P}(S_n = k)}.$$

A l'aide de la question 1., on remplace

$$\mathbf{P}(X_j = \ell | S_n = k) = \frac{e^{-\lambda^{(j)}} e^{-\lambda_j}}{e^{-\lambda}} \frac{(\lambda^{(j)})^{k-\ell} \lambda_j^{\ell}}{\lambda^k} \binom{k}{\ell}.$$

Il suffit de remarquer que $\lambda^k = \lambda^{k-\ell}\lambda^{\ell}$, de poser $p = \lambda_j/\lambda$ et de constater que $1 - p = \lambda^{(j)}/\lambda$. Ainsi :

$$\mathbf{P}(X_j = \ell | S_n = k) = \binom{k}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{k-\ell}.$$

On conclut que

$$\mathcal{L}(X_j | X_1 + \cdots + X_n) = \mathcal{B}\left(X_1 + \cdots + X_n, \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\right).$$

Exercice 6

1. La formule des probabilités totales donnent

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(XY|Y)) = \mathbf{E}(Y\mathbf{E}(X|Y)) = \mathbf{E}(Y^2).$$

   L'autre égalité se déduit de la même manière en inversant le rôle de X et Y.
2. On calcule

$$\mathbf{E}((X-Y)^2) = \mathbf{E}(X^2) + \mathbf{E}(Y^2) - 2\mathbf{E}(XY) = 0,$$

   d'où $X = Y$ presque sûrement par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev.

Exercice 7

Comme $\mathbf{P}(X > t) = \mathbf{1}_{t<0} + \mathbf{1}_{t \geq 0} e^{-\theta t}$ pour tout $t > 0$. Il vient pour $t < 0$, $\mathbf{E}(X|X > t) = \mathbf{E}(X) = 1/\theta$ et pour $t \geq 0$

$$\mathbf{E}(X|X > t) = \frac{\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{(t,\infty)}(X))}{e^{-\theta t}} = e^{\theta t}\int_t^{\infty} x\theta e^{-\theta x}\, dx = e^{\theta t}[-xe^{-\theta x}]_t^{\infty} + e^{\theta t}\int_t^{\infty} e^{-\theta x}\, dx = t + 1/\theta.$$

Finallement, $\mathbf{E}(X|X > t) = t \vee 0 + 1/\theta$.

Exercice 8

1. La densité de la loi jointe de (X, Y, Z) est donnée par

$$f_{(X,Y,Z)}(x,y,z) = f_{Z|X=x,y=y}(z) f_{Y|X=x}(y) f_X(x) = \mathbf{1}_D(x,y)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z)(y-x)^2 e^{-(z+1)(y-x)}$$

2. À l'aide de la densité conditionelle, on remarque que $\mathcal{L}(Z|X,Y) = \mathcal{E}(Y - X)$. On calcule la loi de Z en intégrant la loi jointe par rapport aux marginales X et Y :

$$\begin{aligned} f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y,Z)}(x,y,z)\, dxdy = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z)\int_0^1\int_x^{\infty}(y-x)^2 e^{-(z+1)(y-x)}\, dydx \\ = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z)\frac{1}{z+1}\int_0^{\infty} u^2(z+1)e^{-(z+1)u}\, du = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z)\frac{2}{(z+1)^3} \end{aligned}$$

3. Toujours par la formule de Bayes

$$f_{(X,Y)|Z=z}(x,y) = \frac{f_{(X,Y,Z)}(x,y,z)}{f_Z(z)} = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{D\times\mathbb{R}_+^*}(x,y,z)(y-x)^2(z+1)^3 e^{-(z+1)(y-x)}$$

4. En utilisant la densité conditionelle

$$\mathbf{E}(\sqrt{Y-X}|Z=z) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{z>0}(z+1)^3\int_0^1\int_x^\infty (y-x)^{5/2}e^{-(z+1)(y-x)}\ dydx$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{1}_{z>0}(z+1)^3\int_0^\infty \frac{u^{5/2}}{(z+1)^{7/2}}e^{-u}\ du = \frac{\mathbf{1}_{z>0}}{2\sqrt{z+1}}\int_0^\infty u^{7/2-1}e^{-u}\ du = \frac{\Gamma(7/2)}{2\sqrt{z+1}}\mathbf{1}_{z>0} = \frac{15\pi}{16\sqrt{z+1}}.$$

5. Soit g une fonction continue bornée

$$\mathbf{E}(g(X,U,V)) = \int_{\mathbb{R}^3} g(x,y-x,z(y-x))f_{(X,Y,Z)}(x,y,z)\ dxdydz.$$

On fait le changement de variable $(t,u,v)=\phi(x,y,z)=(x,y-x,z(y-x))$. Nous avons $\phi^{-1}(t,u,v)=(t,u+t,v/u)=(x,y,z)$. On calcule

$$\mathsf{det}\ \phi^{-1}(t,u,v) = \left|\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -v/u^2 & 1/u\end{pmatrix}\right| = 1/u.$$

Enfin $\phi(D\times\mathbb{R}_+^*) = [0,1]\times\mathbb{R}_+^2$ d'où

$$\mathbf{E}(g(X,U,V) = \int_0^1\int_0^\infty\int_0^\infty g(t,u,v)ue^{-u}e^{-v}\ dtdudv,$$

d'où

$$f_{(X,U,V)}(x,u,v) = \underbrace{\mathbf{1}_{[0,1]}(x)}_{f_X(x)}\ \underbrace{\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(u)ue^{-u}}_{f_U(u)}\ \underbrace{\mathbf{1}_{[0,1]}(v)e^{-v}}_{f_V(v)}.$$

6. D'après la décomposition de la densité jointe, on obtient l'indépendance des trois variables.

Exercice 9 *(Extrait de l'examen de janvier 2015)*

1. On répond à toutes les questions de front. Pour cela, posons

$$\begin{pmatrix}U\\ V\\ W\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix}.$$

Ceci montre que (U,V,W) est un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance $\Sigma = AA^*$:

$$\Sigma = AA^* = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 0 & 9\\ 0 & 3 & 0\\ 9 & 0 & 26\end{pmatrix}$$

Donc $U\sim\mathcal{N}(0,6)$, $V\sim\mathcal{N}(0,3)$ et $W\sim\mathcal{N}(0,26)$. Parmi ces trois couples, sauf (U,W) n'est pas indépendant.

2. On veut trouver $a\in\mathbb{R}$ tel que $\mathsf{Cov}\ (W-aU,U)=0$, c'est à dire $a=\frac{\mathsf{Cov}\ (W,U)}{\mathbf{V}(U)}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$. On déduit donc

$$Z = W - \frac{3}{2}U = \frac{5}{2}X_2 - \frac{5}{2}X_3.$$

Ainsi, (U,Z) est gaussien et $\mathsf{Cov}\ (U,Z)=0$, ils sont indépendants. De plus, $\mathbf{E}(W|U)=\frac{3}{2}U$.