TD1 : Variables aléatoires réelles, vecteurs aléatoires

Exercice 1

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{e^x}{2}\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x) + \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$.

1. Montrer que F est une fonction de répartition d'une mesure de probabilité.
2. En cas de réponse positive à la question précédante, on se donne X une *v.a.r.* de fonction de répartition F. La variable X admet-elle une densité ?

Exercice 2

Soit X une *v.a.r.* de densité $f(x) = xe^{-x^2/2}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. La variable aléatoire $Y = X^2$ est-elle à densité ? Reconnaître la loi de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 3

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

1. Déterminer les lois de e^X (cette loi est appelée loi log-normale), $|X|$ et X^2 (loi du $\chi^2(1)$). Pour ce faire, on déterminera les fonctions de répartition et les densités.
2. Calculer l'espérance et la variance de ces *v.a.r.*.
3. Calculer le moment d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) de X.

Exercice 4

Une *v.a.r.* X suit une loi de Weibull $\mathcal{W}(\alpha,\beta)$ si sa densité est égale à :

$$f_X(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad \alpha,\beta > 0.$$

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. On suppose que X modélise la durée de vie d'un composant électronique. On appelle taux de panne de X la fonction :

   $$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{1-F_X(x)}, \quad x \geq 0.$$

   Expliciter h_X.
3. Calculer le moment d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) de X. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 5

Montrer qu'une *v.a.* X non identiquement nulle à valeurs positives suit une loi exponentielle si et seulement si elle est diffuse et sans mémoire, *i.e.* pour tous $s,t > 0$: $\mathbf{P}(X > s+t | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$.

Exercice 6

La loi bêta de 1ère espèce $\beta_I(a,b)$, $a,b > 0$, admet pour densité :

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x), \quad \text{où} \quad B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

1. Montrer que $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ pour tous $a,b > 0$.
2. Soit $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$. Montrer que U et U^2 suivent des lois bêta particulières dont on précisera les paramètres.
3. Calculer le moment d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) de $X \sim \beta_I(a,b)$.
4. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 7

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. On s'intéresse à la *v.a.* $X^+ = \max(X,0)$.

1. Que vaut $\int_{\mathbb{R}} h(x)\ d\delta_0(x)$?
2. À l'aide de la caractérisation par des fonctions tests, montrer que la loi de X^+ est un mélange d'une masse de Dirac en 0 et d'une loi à densité qu'on déterminera.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X^+.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ où $a > 0$ est un paramètre.

1. Montrer que f est une densité de probabilité. La loi associée est appelée loi de Cauchy (centrée) de paramètre $a > 0$ et est notée $\mathcal{C}(a)$.
2. Soit $X \sim \mathcal{C}(1)$. Montrer que X n'admet pas de premier moment.
3. Déterminer la loi de $\log |X|$.

Exercice 9

Soit X la durée de vie, en années, d'un composant électronique. On suppose que $X \sim \mathcal{E}(\theta)$ (loi exponentielle), $\theta > 0$. En outre, l'exploitant a une politique le conduisant à changer systématiquement tout composant dont la durée de vie a atteint 5 ans. Soit Y la durée de vie d'un composant. Déterminer la loi de Y appelée loi tronquée.

Exercice 10

Soit $X \sim \mathcal{E}(\theta)$. Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la partie entière.

Exercice 11

Soit (X, Y) et (U, V) deux vecteurs aléatoires de densités respectives

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(1+xy)\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(x,y) \quad \text{et} \quad g(u,v) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{[-1,1]^2}(u,v).$$

1. Vérifier que f et g sont bien des densités sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les densités marginales de (X, Y) et (U, V) notées respectivement f_X, f_Y, g_U et g_V.
3. Justifier que X et U d'une part, et que Y et V d'autre part ont même loi mais que, cependant, (X, Y) et (U, V) ne suivent pas la même loi.

Exercice 12 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

Soient X et Y deux variables aléatoires positives de carré intégrable définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\alpha \in (0, 1)$.

1. Sous quelle condition a-t-on $\mathbf{E}(X^2) = 0$? Dans la suite une telle situation est supposée exclue.
2. En considérant la fonction $\lambda \to \mathbf{E}[(X + \lambda Y)^2]$, retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\mathbf{E}(XY)^2 \leq \mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2).$$
3. Montrer que pour tout $\alpha \in (0, 1)$
$$(1-\alpha)\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(X\mathbf{1}_{[\alpha\mathbf{E}(X),\infty)}(X)).$$
4. En déduire
$$\mathbf{P}(X \geq \alpha\mathbf{E}(X)) \geq (1-\alpha)^2\frac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}.$$

TD2 : Indépendance

Exercice 1

Soit X une *v.a.r.* de densité

$$f_\theta(x) = c_\theta x \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\theta > 0$ est fixé. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires *i.i.d.* de même loi que X. On pose :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

La variable $\overline{X}_n$ est appelée moyenne empirique.

1. Déterminer la constante c_θ et la fonction de répartion F_θ de X.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$. En déduire $\mathbf{E}(\overline{X}_n)$ et $\mathbf{V}(\overline{X}_n)$.
3. Déterminer la fonction de répartition G_n de Y_n et sa densité, si elle existe, g_n.
4. Calculer $\mathbf{E}(Y_n)$ et $\mathbf{V}(Y_n)$.

Exercice 2

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des *v.a.r. i.i.d.*. On note $\mu = \mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{V}(X_1) = \sigma^2$. La variance empirique est donnée par l'expression

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

Montrer que

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$$

et exprimer l'espérance de S_n^2 en fonction de σ^2. (On pourra considérer dans un premier temps $\mu = 0$).

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme standard $\mathcal{U}_{[0,1]}$. Déterminer les densités des variables aléatoires suivantes $U = X + Y$, $V = X - Y$, $Z = XY$, $T = X/Y$ (*suggestion : on pourra commencer par déterminer les densités des couples* (U, V) *et* (Z, T)).

Exercice 4

Soient X et Y deux *v.a.r.* indépendantes de densités respectives

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\mathbf{1}_{(-1,1)}(x) \quad \text{et} \quad g(y) = y e^{-y^2/2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y).$$

Montrer que $U = XY$ suit une loi centrée réduite. (On pourra considérer le changement de variables $(x, y) \to (u, v) = (xy, y)$).

Exercice 5 *(Extrait du partiel de novembre 2014)*

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y respectivement de loi $\Gamma(a, \theta)$ et $\Gamma(b, \theta)$ avec $a, b, \theta > 0$. On pose

$$U = X + Y \quad \text{et} \quad T = \frac{X}{X+Y}.$$

On donne également la densité d'une loi $\Gamma(a, \theta)$:

$$f(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} e^{-\theta x} x^{a-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer la densité du couple (U, T).
2. En déduire que U et T sont des variables aléatoires indépendantes.
3. Identifier les lois de U et T, et montrer que T suit une loi bêta (a, b) de densité

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(t).$$

4. Soit $Z = X/Y$. Déduire de ce qui précède que U et Z sont indépendantes, et calculer la densité de Z. *(Attention : si il est possible de répondre cette question sans utiliser les questions précédantes, c'est plus long)*

Exercice 6 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\beta_I(a,b)$ et $\beta_I(a+b,c)$ pour $a,b,c>0$. On rappelle que la densité d'une loi $\beta_I(a,b)$ est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

On cherche à montrer que $U = XY$ suit une loi $\beta_I(a, b+c)$. On rappelle également que

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx \quad \text{et} \quad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

1. Donner la densité du couple (X,Y).
2. Calculer, à l'aide d'un changement de variable, la densité $f_{(U,V)}$ du couple $(U,V) = (XY, Y)$.
3. Justifier que la densité f_U de $U = XY$ est donnée par la forme intégrale suivante

$$f_U(u) = \frac{1}{B(a,b)B(a+b,c)} \mathbf{1}_{[0,1]}(u) u^{a-1} \int_u^1 (v-u)^{b-1}(1-v)^{c-1}\, dv.$$

4. Conclure à l'aide d'un changement variable (unidimensionnel).

Exercice 7

Soit $X = (U,V)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ de densité f_X. On considère $Y = (R,\Theta)$ ses coordonnées polaires.

1. Montrer que Y admet une densité f_Y que l'on explicitera en fonction f_X.
2. Application : Les véhicules spatiaux désirant s'arrimer à la Station Spatiale Internationale (ISS) s'appuient sur le système de guidage GPS pour la phase d'approche de la station. Cependant, à faible distance de l'ISS, les signaux émits par la constellation des satellites qui consistuent le système GPS sont fortement perturbés par des phénomènes de réflexions multiples sur la structure métallique de la station. L'onde électromagnétique reçue par le récepteur GPS du véhicule spatial se présente donc comme la superposition de deux ondes en quadrature dont les amplitudes U et V sont des variables aléatoires gaussienne $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ supposées indépendantes (pour des raisons d'isotropie). L'étude de l'amplitude $R = \sqrt{U^2+V^2}$ de l'onde reçue est de première importance pour assurer un guidage fiable lors de la manoeuvre d'arrimage.
   (a) À l'aide de la question 1, expliciter la densité du couple (R,Θ).
   (b) Montrer que R et Θ sont indépendantes.
   (c) Reconnaître la loi de Θ.
   (d) Donner la densité de R. Cette loi s'appelle loi de Rayleigh.
   (e) Calculer l'espérance et la variance de R.

Exercice 8 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit ϕ le C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi)$ dans $\mathbb{R}_*^2$ défini par $\phi(u,v) = (\sqrt{u}\cos(v), \sqrt{u}\sin(v))$. On pose $(U,V) = \phi^{-1}(X,Y)$. On se propose d'étudier la loi du couple (U,V).

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne positive. Exprimer $\mathbf{E}(g \circ \phi^{-1}(X,Y))$ en fonction des densités de X et Y notées f_X et f_Y respectivement.
2. À l'aide du changement de variable $(x,y) = \phi(u,v)$, montrer que

$$\mathbf{E}(g(U,V)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(u,v) \frac{e^{-u/2}}{2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u) \frac{1}{2\pi} \mathbf{1}_{(0,2\pi)}(v)\, dudv.$$

3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer les lois de U et de V.
5. Déterminer la loi de $1 - \exp(-U/2)$.
6. Proposer une procédure permettant de simuler des paires de nombres aléatoires distribués selon une loi normale centrée réduite dans le plan à partir d'une source de nombres aléatoires de loi uniforme. Cette méthode est appelée méthode de Box-Müller.

Exercice 9 *(Extrait de l'examen de janvier 2009)*

Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur aléatoire de densité f définie pour pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = K \exp(6xy - 2x^2 - 5y^2)$$

1. Déterminer K.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 10

Soit $Y \sim \mathcal{E}(\theta)$ et ε une variable aléatoire indépendante de loi de Rademacher symétrique, *i.e.* $\mathbf{P}(\varepsilon = 1) = 1 - \mathbf{P}(\varepsilon = -1) = p$ avec $p = 1/2$. Montrer que la variable aléatoire $Z = \varepsilon Y$ est à densité et la déterminer. Cette loi est appelée loi exponentielle symétrique.

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $1/X$ suit une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$.
2. Si Y, Z sont deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, montrer que Y/Z suit une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$.

Exercice 12

Soient X_1 et X_2 deux *v.a.r.* indépendantes de lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

1. Déterminer les lois de $m := \min(X_1, X_2)$ et $M := \max(X_1, X_2)$.
2. Supposant que $\lambda_1 = \lambda_2$ montrer que m et $M - m$ sont indépendantes.

Exercice 13

Un singe tape au hasard sur un clavier une lettre ou un symbole et recommence une infinité de fois de façon indépendante. Montrer que, presque sûrement, il aura tapé en entier *Les Misérables* de Victor Hugo sans aucune faute de frappe. N'a-t-on pas un résultat plus fort encore ?

TD3 : Fonctions caractéristiques

Exercice 1

Déterminer la fonction caractéristique de X dans les cas suivants :

1. $\mathbf{P}_X = \delta_a$, $a \in \mathbb{R}$;
2. $\mathbf{P}_X = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$;
3. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$;
4. $\mathbf{P}_X = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \delta_n$;
5. $X \sim \mathcal{P}(\Theta)$;
6. $X \sim \mathcal{U}_{[-1,1]}$;
7. X admet pour densité $f_X(x) = (1 - |x|)\mathbf{1}_{[-1,1]}$, $x \in \mathbb{R}$;
8. pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
$$\mathbf{P}_X(B) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_B(0) + \frac{1}{4}\int_{[-1,1]} \mathbf{1}_B(x)\ dx;$$
9. $X \sim \mathcal{E}(\Theta)$.

Exercice 2

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la fonction caractéristique de $Y = X^+ = \max(X, 0)$.

Exercice 3

Soient X_1 et X_2 deux *v.a.* indépendantes de loi $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ où $p \in (0, 1)$. Montrer à l'aide des fonctions caractéristiques que $X_1 + X_2$ suit une binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$.

Exercice 4 *(Extrait du partiel de novembre 2016)*

Soient $X_1, \cdots, X_n$, $n \geq 1$, des variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$. Montrer en utilisant les fonctions caractéristiques que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

La loi normale est dite α-stable d'indice $\alpha = 2$.

Exercice 5 *(Extrait de l'examen de février 2017)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $\sigma > 0$.

1. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes et de même loi que l'on précisera.
2. Déterminer la loi de X/Y.

Exercice 6 *(Extrait du partiel de novembre 2013)*

On rappelle la densité et la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Soit $X \sim \mathcal{C}(1)$, que peut-on dire de son espérance ? de sa variance ? Justifier.
2. Montrer que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ alors $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ suit également une loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. (Une telle loi est dite 1-stable).

Exercice 7

Soient $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de *v.a. i.i.d.* et N une *v.a.* à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_k)_{k \geq 1}$. On suppose que $\mathbf{E}(X_1^2) < \infty$ et $\mathbf{E}(N^2) < \infty$. Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Calculer $\mathbf{E}(S_N)$ et $\mathbf{V}(S_N)$.
2. Calculer la foncton caractéristique de S_N et retrouver les résultats de la questions précédantes.

Exercice 8 *(Extrait de l'examen de janvier 2017)*

On considère X_1, X_2, X_3 et X_4 quatre variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = X_1X_2 + X_3X_4$.

1. Montrer que la fonction caractéristique de X_1X_2 vaut

$$t \to \phi_{X_1X_2}(t) = \mathbf{E}(e^{itX_1X_2}) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

2. En déduire la fonction caractéristique de Y.
3. Soit Z une variable aléatoire de densité $x \to e^{-|x|}/2$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Calculer sa fonction caractéristique.
4. Conclure.

TD4 : Vecteurs gaussiens

Exercice 1 *(Extrait de l'examen de janvier 2017)*

Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré tel que $\mathbf{E}(X^2) = 4$, $\mathbf{E}(Y^2) = 1$. On suppose de plus que $2X + Y$ et $X - 3Y$ sont indépendantes.

1. Que vaut la covariance $\mathsf{Cov}(2X + Y, X - 3Y)$?
2. En déduire la covariance $\mathsf{Cov}(X, Y)$.
3. Déterminer la matrice de covariance de (X, Y).
4. Montrer que le vecteur $(X + Y, 2X - Y)$ est gaussien puis déterminer sa matrice de covariance.

Exercice 2

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de *v.a.r. i.i.d.* de loi normale centrée et de variance $\sigma^2 > 0$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ par $X_n = \theta U_{n-1} + U_n$ pour tout $n \geq 2$ et $X_1 = U_1$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$, $X = (X_1, \ldots, X_n)^*$ est une vecteur gaussien non dégénéré dont on précisera la densité, l'espérance et la matrice de covariance.

Exercice 3

On considère $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et une *v.a.* ε indépendante de X et de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$.

1. Montrer que la *v.a.* $Y = \varepsilon X$ est gaussienne et que les *v.a.* X et Y sont non corrélées.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Le couple (X, Y) est-il gaussien ?

Exercice 4

(Extrait du partiel de Décembre 2013)]
La fonction caractéristique d'une loi du Chi-deux à 1 degré de liberté est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par $\psi(t) = 1/(1 - 2it)^{1/2}$.
On considère trois *v.a.* indépendantes X, Y et Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Donner la loi de la variable aléatoire $U = X + Y + Z$.
2. Montrer que $(U, X - Y)$ est un vecteur gaussien dont on précisera l'espérance et la matrice de covariance. En déduire que U est indépendante des variables $X - Y$, $Y - Z$ et $Z - X$.
3. Montrer que les variables aléatoires $X + Y + Z$, $2X - Y - Z$ et $Y - Z$ sont indépendantes. Identifier les lois de $(2X - Y - Z)^2/6$ et de $(Y - Z)^2/2$.
4. Vérifier l'égalité
$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = \frac{1}{2}(2x - y - z)^2 + \frac{3}{2}(y - z)^2$$
pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ et en déduire l'expression de la fonction caractéristique de $V = (X - Y)^2 + (Y - Z)^2 + (Z - X)^2$.
5. Les variables $(X - Y)^2$, $(Y - Z)^2$ et $(Z - X)^2$ sont-elles indépendantes ?

TD5 : Convergences

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a.* de loi

$$\mathbf{P}_{X_n} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\delta_0 + \frac{1}{2n^2}(\delta_{-n} + \delta_n).$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
2. Que dire de la convergence en moyenne quadratique ?

Exercice 2

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a. i.i.d.* positives admettant un premier moment. On note $\mathbf{E}(X_1) = m < \infty$ et on pose $U_n = X_n/n^2$, $n \geq 1$. La suite $(U_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement ? dans $\mathbf{L}^1$? En probabilité ? Si oui, vers quelle limite ?
2. On suppose désormais que les *v.a.* X_n admettent une densité

$$f(x) = \frac{c}{\pi(x^2+1)}\mathbf{1}_{x>0}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Calculer la valeur de la constante c.
   (b) Est-on dans les hypothèses de la question 1 ?
   (c) Parmi les résultats obtenus à la question 1, lesquels sont toujours valides et pourquoi ?

Exercice 3 *(Extrait de l'examen de rattrapage de mars 2014)*

Soit X une *v.a.* de densité f_θ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_\theta(x) = (1-\theta)\mathbf{1}_{[-1/2,0]}(x) + (1+\theta)\mathbf{1}_{[0,1/2]}(x),$$

où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

1. Quelles sont les valeurs possibles de θ ?
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des *v.a. i.i.d.* de densité f_θ. Soient U_n et V_n les variables aléatoires définies par

$$U_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(-\infty,0]}(X_i) \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(0,\infty)}(X_i).$$

   (a) Montrer que U_n et V_n suivent des lois binomiales dont on précisera la valeur des paramètres. Les *v.a.* U_n et V_n sont-elles indépendantes.
   (b) Montrer que $(U_n - V_n)/n$ tends presque sûrement vers une valeur déterministe que l'on précisera.
   (c) Calculer $\mathbf{E}(U_n)$, $\mathbf{E}(V_n)$ et en déduire la limite de $\mathbf{E}((V_n - U_n)/n)$ quand $n \to \infty$. Ce résultat pouvait-il se déduire de la question précédente ?
   (d) Calculer $\mathbf{E}(U_n V_n)$ et $\mathbf{Cov}(U_n, V_n)$.
   (e) Montrer que $\mathbf{V}((U_n - V_n)/n)$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Ce résultat implique-t-il celui de la question 3b ? En implique-t-il une forme plus faible (que l'on précisera alors) ?
   (f) Pour n grand, construire un intervalle de confiance pour θ de niveau de risque 5% à partir des X_i, $1 \leq i \leq n$, et un autre à partir des U_i, $1 \leq i \leq n$. Commenter. Quelle est l'utilité de supposer que n est grand ?

Exercice 4 *(Extrait du rattrapage de février 2017)*

Soit $(X_n)_{n\geq}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi de Bernoulli sur $\{-1, 1\}$ de paramètre $p \in (0, 1)$. Autrement dit, $\mathbf{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_1 = -1) = p$. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$ alors $(|S_n|)_{n\geq 1}$ tend presque sûrement vers $+\infty$.
2. On considère désormais le cas $p = \frac{1}{2}$. Soit $\alpha > 0$.
   (a) Calculer $\mathbf{E}[e^{\alpha X_1}]$ puis $\mathbf{E}[e^{\alpha S_n}]$. En déduire que $\mathbf{E}[(\cosh \alpha)^{-n} e^{\alpha S_n}] = 1$.

(b) À l'aide de la loi forte des grands nombres montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{\alpha S_n}}{(\cosh\alpha)^n}\right]^{1/n} = \frac{1}{\cosh\alpha}.$$

En déduire que $(\cosh\alpha)^{-n}e^{\alpha S_n}$ converge vers 0 *p.s.*.

(c) Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de convergence dominée ?

Exercice 5

Sur l'espace de Borel standard $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$, on considère la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de *v.a.* définies pour $\omega\in[0,1]$ par

$$X_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\mathbf{1}_{(0,1/n)}(\omega).$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0 mais ne tend pas vers 0 en moyenne quadratique.

Exercice 6 *(Extrait de l'examen de rattrapage de février 2015)*

On considère une machine soumise à des pannes. On note X_1 l'instant de la première panne et, pour $i\geq 2$, X_i le temps de fonctionnement entre la i-ième et $(i+1)$-ième panne. On note T_n l'instant de la n-ième intervention de la maintenance (supposée être réalisée sans délai si bien que $T_n = X_1+\cdots+X_n$). On suppose les *v.a.* X_i *i.i.d.*.

1. On note $N(t)=\max\{n\in\mathbb{N} : T_n\leq t\}$, $t\in\mathbb{R}_+$. Interpréter $N(t)$ dans le contexte de l'énoncé et montrer que pour tout entier $n\geq 0$ et $t\geq 0$, $\{N(t)<n\}=\{T_n>t\}$.
2. Justifier pour tout $t\geq 0$ la double inégalité

$$T_{N(t)}\leq t < T_{N(t)+1}.$$

3. (a) Montrer que, pour n donné, la famille d'événements $A_t=\{N(t)<n\}$ est décroissante en $t\geq 0$ pour l'inclusion, *i.e.* $s\leq t$ implique $A_t\subset A_s$.

   (b) En déduire que si $\mathbf{P}(A_t)\to 0$ lorsque $t\to\infty$ alors $\mathbf{P}(\cap_{t\geq 0}A_t)=0$.
4. On suppose désormais que $\mathbf{E}(X_1)=m<\infty$.

   (a) Montrer que pour tout n entier, T_n admet un premier moment et en déduire que $\mathbf{P}(T_n>t)\to 0$ lorsque $t\to\infty$. Que peut-on en déduire sur le nombre de pannes quand t tend vers l'infini.

   (b) Montrer que T_n/n converge presque-sûrement vers une valeur à déterminer.

   (c) En déduire que la suite $T_{N(t)}/N(t)$ converge presque-sûrement vers m lorsque t tend vers l'infini (on pourra se contenter d'une heuristique).

   (d) Montrer que pour $t\in\mathbb{R}_+$
   $$\frac{T_{N(t)}}{N(t)}\leq\frac{t}{N(t)}<\frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1}\left(1+\frac{1}{N(t)}\right).$$

   (e) En déduire que $t/N(t)$ converge presque sûrement vers m et interpéter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a.* *i.i.d.* de carré intégrable. On pose $m=\mathbf{E}(X_1)$ et $\sigma^2=\mathbf{V}(X_1)$. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \quad\text{et}\quad Z_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k-\overline{X}_n)^2.$$

1. Calculer $\mathbf{E}(Z_n)$ (*(Ce calcul a déjà été effectué dans la feuille de TD 2.)*.
2. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers σ^2.

Exercice 8

On considère une suite de *v.a.* indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$ telles que, pour $n\geq 1$, $\mathbf{P}(X_n=n)=1/n=1-\mathbf{P}(X_n=0)$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.
2. On pose $Y_n=n^{-1}\sum_{k=1}^n X_k$. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle vers 0 en probabilité ?
3. En utilisant le lemme de Cesàro, montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ ne peut converger presque sûrement.
4. Que dire de l'application du lemme de Cesàro à la convergence en probabilité ?

Exercice 9 *(Extrait du rattrapage de février 2017)*

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ (respectivement $(Y_n)_{n\geq 1}$) une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi commune la loi uniforme sur $[0,1]$ (respectivement de loi de Poisson de paramètre $\alpha > 0$).

1. La loi faible des grands nombres $\mathbf{L}^2$ s'applique-t-elle à la suite $(U_n)_{n\geq 1}$? Justifier.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Calculer la limite
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \, dx_1 \dots dx_n.$$
On pourra montrer que cette intégrale est l'espérance d'une fonctionnelle de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.
3. Montrer que $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\alpha$.
4. Montrer que $(Z_n/n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une limite que l'on précisera.
5. En déduire, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, la limite
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f(k/n).$$

Exercice 10

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires *i.i.d.* de loi commune μ. On note F_n la fonction de répartition empirique associée et définie pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$ par
$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[X_i,\infty)}(t).$$
Montrer que si F est la fonction de répartition de la loi μ, alors $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$ presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 *(extrait de l'examen de janvier 2014)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a.* : on suppose $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$; on suppose également que $m_n \to m$ et $\sigma_n \to \sigma$ quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
2. Que se passe-t-il si $\sigma_n \to 0$?

Exercice 12

1. On considère deux *v.a.r. i.i.d.* X et Y définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. On pose $Z = X - Y$ et on note ϕ_X (*resp.* ϕ_Z) la fonction caractéristique de X (*resp.* Z).
   (a) Montrer que $\mathbf{P}_Z = \mathbf{P}_{-Z}$ et que $\phi_Z(t) = |\phi_X(t)|^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $Z \in \mathbf{L}^2$ si et seulement si $X \in \mathbf{L}^2$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par
$$f_n(x) = \begin{cases} \sin^2(2\pi n x) & x \in [-1,1] \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$
   (a) Montrer que f_n est la densité d'une loi de probabilité $\mathbf{P}_n$; calculer l'espérance et la variance de $\mathbf{P}_n$ et calculer ϕ_n sa fonction caractéristique.
   (b) Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de *v.a.* de loi $\mathbf{P}_n$, alors la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ convege en loi vers la loi uniforme sur $[-1,1]$.
   (c) A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$? de la suite des variances des X_n ?
   (d) Montrer que si on suppose en outre l'indépendance des X_n alors la moyenne empirique converge en probabilité vers 0.
   (e) Trouver un exemple de loi symétrique μ pour laquelle il n'existe pas de couple (X,Y) de *v.a. i.i.d.* telles que $X - Y$ soit de loi μ.

Exercice 13 *(extrait de l'examen de janvier 2015)*

Soit (P) la propriété suivante : si X et Y sont deux *v.a.r. i.i.d.* de loi commune μ, $(X+Y)/\sqrt{2}$ est aussi de loi μ.

1. Montrer que la loi $\mathcal{N}(0,1)$ vérifie (P).
2. Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu(x) = 1$ et vérifiant (P).

(a) Montrer que si $X \sim \mu$ alors $\mathbf{E}(X) = 0$.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et toute suite $X_1, \ldots, X_{2^n}$ de *v.a. i.i.d.* de loi μ, la *v.a.*

$$Y_n = 2^{-n/2} \sum_{i=1}^{2^n} X_i$$

est de loi μ.

(c) Montrer que la suite Y_n converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(d) Identifier μ.

Exercice 14 *(Extrait du rattrapage de février 2017)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose qu'il existe $(\alpha, \lambda) \in (0, \infty)^2$ tels que

$$\mathbf{P}(X_1 > x) \sim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{x^\lambda}.$$

La fonction de répartition F d'une loi de Fréchet de paramètre $(\alpha, \lambda) \in (0, \infty)^2$ est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$F(t) = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(t) e^{-\alpha t^{-\lambda}}.$$

Montrer que $Z_n = n^{-\frac{1}{\lambda}} \max(X_1, \ldots, X_n)$ converge en distribution vers une loi de Fréchet.

Exercice 15 *(extrait de l'examen de janvier 2015)*

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de *v.a i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit $\delta > 0$.

   (a) Montrer que si $\delta < 1/\lambda$ alors

   $$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n} \max_{1\leq k\leq n} X_k < \frac{1}{\lambda} - \delta\right) = \left(1 - e^{-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}-\delta\right)\log n}\right)^n.$$

   (b) En déduire que

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n} \max_{1\leq k\leq n} X_k < \frac{1}{\lambda} - \delta\right) = 0.$$

   (c) Montrer que

   $$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n} \max_{1\leq k\leq n} X_k > \frac{1}{\lambda} + \delta\right) \leq n\mathbf{P}\left(X_1 > \left(\frac{1}{\lambda} + \delta\right)\log n\right).$$

   (d) En déduire que

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{1}{\log n} \max_{1\leq k\leq n} X_k > \frac{1}{\lambda} + \delta\right) = 0.$$

   (e) Conclure que la suite

   $$\left(\frac{1}{\log n} \max_{1\leq k\leq n} X_k\right)_{n\geq 1}$$

   converge en probabilité vers une limite à déterminer.

2. (a) Montrer que la fonction $G(t) = e^{-e^{-\lambda t}}$ est la fonction de répartition d'une loi de probabilité (appelée loi de Gumbel).

   (b) Montrer que si $t \in \mathbb{R}$ alors

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\log n}{\lambda} \leq t\right) = G(t).$$

   (c) En déduire que la suite de *v.a.*

   $$\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\log n}{\lambda}\right)_{n\geq 1}$$

   converge en loi vers une loi limite à déterminer.

Exercice 16 *(Extrait de l'examen de janvier 2017)*

Dans tout le problème, log désigne le logarithme naturel et on convient que $\log 0 = -\infty$.

Partie I

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées satisfaisant $\mathbf{E}(|\log(X_1)|^2) < \infty$. On pose $m = \mathbf{E}(\log(X_1))$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}(\log(X_1))$. Enfin, on définit, pour tout $n \geq 0$, la variable aléatoire $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

1. Justifier la convergence presque-sûre de $\frac{1}{n}\log(Y_n)$ vers une limite que l'on précisera. En déduire la convergence presque-sûre de $Y_n^{1/n}$ vers une limite que l'on précisera.
2. On définit pour tout $n \geq 0$
$$Z_n = \frac{\log(Y_n) - nm}{\sigma\sqrt{n}}.$$
La suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle en loi ? vers quelle limite ?
3. En déduire la convergence en loi de $(e^{-m\sqrt{n}}Y_n^{\frac{1}{\sqrt{n}}})_{n\geq 1}$ vers la variable aléatoire $e^{\sigma\Gamma}$ où Γ suit une loi normale centrée réduite. Justifier.

Partie II

Rappel :

Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est lipschitzienne si il existe une constante $k \geq 0$ telle que $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.

On munit $\mathbb{R}^d$ de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|$. Soient $\mathbb{X}$ un ensemble et $(f_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathbb{X}}$ une famille de fonction lipschitzienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour chaque $\varepsilon \in \mathbb{X}$, on note c_ε la constante de Lipschitz, *i.e.* :

$$c_\varepsilon := \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d : x\neq y} \frac{\|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)\|}{\|x-y\|} = \inf\left\{k \geq 0 : \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d, \quad \|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\|\right\}.$$

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^d$ de loi μ et $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{X}$ indépendantes et identiquement distribuées. On suppose en outre que $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est indépendante de X_0. On définit la suite de vecteurs aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ par récurrence :

$$X_0 \sim \mu \quad \text{et pour tout} \quad n \geq 0 : \quad X_{n+1} = f_{\varepsilon_n}(X_n).$$

1. Pourquoi $X_{n+1} = f_{\varepsilon_n} \circ f_{\varepsilon_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\varepsilon_0}(X_0)$ est-elle de même loi que $\widetilde{X}_{n+1} = f_{\varepsilon_0} \circ f_{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ f_{\varepsilon_n}(X_0)$?
2. Pour les questions a), b) et c) suivantes, on suppose que $f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0 \in \mathbf{L}^1$.
   (a) Montrer que pour tout $k \geq 0$:
   $$\|\widetilde{X}_{k+1} - \widetilde{X}_k\| \leq \prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell}\|f_{\varepsilon_k}(X_0) - X_0\|$$
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et $p \geq 0$:
   $$\|\widetilde{X}_{n+p} - \widetilde{X}_n\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1}\prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell}\|f_{\varepsilon_k}(X_0) - X_0\|.$$
   (c) En déduire, sous la condition $\mathbf{E}(c_{\varepsilon_0}) < 1$, la convergence dans $\mathbf{L}^1$ de la suite $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ (on montrera que $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbf{L}^1$).
3. Pour les questions a),b) et c) suivantes, on suppose que $f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0 \in \mathbf{L}^\infty$.
   (a) En utilisant l'inégalité de la question 2b), montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout $\delta > 0$
   $$\mathbf{P}(\sup_{p\geq 0}\|\widetilde{X}_{n+p} - \widetilde{X}_n\| > \delta) \leq \mathbf{P}\left(\text{sup ess } \|f_{\varepsilon_0}(X_0) - X_0\|_\infty \sum_{k=n}^{\infty}\prod_{\ell=0}^{k-1} c_{\varepsilon_\ell} > \delta\right).$$
   (b) En utilisant le critère de Cauchy pour les séries numériques, montrer, sous la condition $\mathbf{E}(\log(c_{\varepsilon_0})) < 0$, que la série $\sum_{k=0}^\infty \prod_{\ell=0}^k c_{\varepsilon_\ell}$ est convergente presque-sûrement et en probabilité (on pourra utiliser le résultat de la question 1. de la partie I).
   (c) En déduire que $(\widetilde{X}_n)_{n\geq 0}$ converge presque-sûrement. On notera $\widetilde{X}_\infty$ la limite.
4. En supposant les conditions de la question 3 satisfaites, montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers la loi de $\widetilde{X}_\infty$.
5. Parmi les conditions $\mathbf{E}(c_{\varepsilon_0}) < 1$ et $\mathbf{E}(\log(c_{\varepsilon_0})) < 0$, laquelle est la plus faible ?

TD6 : Espérances Conditionelles

Exercice 1 *(Extrait de l'examen de rattrapage de mars 2013)*

Soit X une variable aléatoire intégrable, de fonction de répartition F, et de densité f. Soit ξ une variable aléatoire indépendante de X de loi $\mathbf{P}_\xi = \frac{\delta_{-1}+\delta_1}{2}$. On pose $Y = X + \xi$.

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y \leq y}|\xi)$.
2. En déduire la fonction de répartition de Y.
3. La loi de Y est-elle à densité ? Si oui, la calculer.

Exercice 2 *(Extrait de l'examen de janvier 2013)*

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^3$ de moyenne $m = (1, 0, 3)^*$ et de matrice de covariance

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer le noyau de Σ.
   (b) La loi de X est-elle à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$?
   (c) Quel est le support de la loi de X ?
2. Calculer l'espérance conditionnelle de X_2 sachant X_1.
3. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x$.

Exercice 3 *(Extrait de l'examen de janvier 2014)*

Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, I_3)$.

1. Montrer que $(X, X+Y, X+Y+Z)$ est un vecteur gaussien dont on précisera la moyenne et la matrice de covariance.
2. (a) Montrer que le couple $(X, X+2Y)$ admet une densité sur $\mathbb{R}^2$, calculer cette densité.
   (b) Calculer la densité de $X + 2Y$.
   (c) Soit $a \in \mathbb{R}$, calculer la densité conditionnelle de X sachant $X + 2Y = a$ et en déduire l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X|X + 2Y)$.

Exercice 4 *(Extrait de l'examen de rattrapage de mai 2013)*

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de densité f définie par $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x)$. On note $S = X + Y$.

1. Déterminer la densité de la loi du couple (X, S).
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant S.
3. Calculer $\mathbb{E}(X|S)$.

Exercice 5

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson. Déterminer la loi de X_j sachant $X_1 + \cdots + X_n$.

Exercice 6

Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de carré intégrable et satisfaisant

$$\mathbf{E}(X|Y) = Y, \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}(Y|X) = X \quad \text{p.s.}.$$

1. Montrer que $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(Y^2)$.
2. En déduire la variance de $X - Y$ puis l'égalité $X = Y$ p.s..

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\theta > 0$. Déterminer $\mathbf{E}(X|X > t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Soient X, Y, Z trois *v.a.r.* telles que

— X est une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$;
— la densité de Y conditionnellement à X est donnée par

$$f_{Y|X=x}(y) = (y-x)e^{-(y-x)}\mathbf{1}_{[x,\infty)}(y);$$

— la densité de Z conditionnellement à (X,Y) est définie par

$$f_{Z|X=x,Y=y}(z) = (y-x)e^{-z(y-x)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z)\mathbf{1}_D(x,y),$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y > x\}$.

1. Déterminer la loi jointe de (X,Y,Z).
2. Quelle est la loi de Z conditionnellement à (X,Y) ? Calculer la loi de Z.
3. Déterminer la loi de (X,Y) sachant $Z = z$.
4. Calculer $\mathbf{E}(\sqrt{Y-X}|Z=z)$.
5. On pose $U = Y - X$ et $V = Z(Y-X)$. Déterminer la loi jointe de (X,U,V).
6. X, U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 *(Extrait de l'examen de janvier 2015)*

Soient X_1, X_2 et X_3 trois *v.a.r.* gaussiennes centrées réduites indépendantes. On pose $U = 2X_1 - X_2 - X_3$, $V = X_1 + X_2 + X_3$ et $W = 3X_1 + X_2 - 4X_3$.

1. Déterminer les lois de U, V et W. Parmi les couples suivants, lesquels sont indépendants : (U,V), (U,W), (V,W) ?
2. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $W = aU + Z$ où Z est indépendante de U. En déduire $\mathbf{E}(W|U)$.