

Mathématiques Appliquées

Cours-TD : K. Abdi, M. Huault, B. de Loynes et S. Pommier

TD1 : Fonction numérique d'une variable réelle Ensemble de définition et limites**Exercice 1**

1. Rechercher les ensembles de définition des expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) & x^3(1+x)^7 \\ 2) & (2x^2+x+3)^{-1} \\ 3) & x^{-1}(\sqrt{1+x}-1) \end{array} \quad \begin{array}{ll} 4) & \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\ 5) & \ln(e^x+1) \\ 6) & (2-|x-3|)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

2. Entraînement complémentaire.

$$\begin{array}{ll} a) & \ln(|2x-3|-2) \\ c) & (x \ln x)^{-1} \end{array} \quad \begin{array}{ll} c) & [x \cdot \ln(x) \cdot \ln(\ln(x))]^{-1} \\ d) & \ln(5-e^x) \end{array}$$

Exercice 2Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition et déterminer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} ; a = 0 \\ f_2(x) &= \frac{x+1}{x^2-1} ; a = -1 \\ f_3(x) &= \frac{x^3+x^2-7x+2}{x^2-x-2} ; a = 2 \\ f_4(x) &= \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} ; a = 3 \\ f_5(x) &= x\sqrt{\frac{x-1}{x}} ; a = 0 \end{aligned}$$

Exercice 3Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. \ln \sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x \\ 2. \frac{1}{2} \ln |x-1| - \ln |x-1| = 0 \\ 3. \ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11) \end{array}$$

4. $\ln(-x - 2) = \ln\left(\frac{-x-11}{x+3}\right)$

5. $e^{2x} + e^x = 2$

6. $e^{3x+1} + e^{2x+1} = e^{x+1}$

7. $e^{x^2} \cdot e^x < e^6$

Exercice 4

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = -\frac{3x+1}{x+1}$$

sur l'intervalle $I =]-1; +\infty[$

- (a) Montrer que f est strictement décroissante sur I
- (b) Déterminer la réciproque de f notée f^{-1} , son expression et son domaine de définition

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x^2 - 2x$$

- (a) Etudier sa continuité et son sens de variation sur l'intervalle $I = [0; 3]$
- (b) Trouver l'image de I par f et étudier l'existence d'une fonction réciproque

3. (*) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

et l'intervalle $I =]3; +\infty[$

- (a) Préciser le domaine de définition de f .
- (b) Montrer que si a et b sont deux éléments distincts de I alors :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{a + b - 4}{f(b) + f(a)}$$

- (c) En déduire le sens de variation de f .
- (d) Déterminer l'image de I par f .
- (e) Déterminer la réciproque de f notée f^{-1} , son expression et son domaine de définition

Exercice 5 : Application

L'entreprise *Verte* a récemment lancé un nouveau produit baptisé *iFone*, présenté comme un téléphone mobile révolutionnaire. Afin de décider des campagnes publicitaires et du prix de lancement, le département Marketing cherche à établir des scénarios portant sur le volume des ventes d'*iFone* au cours du temps. L'entreprise estime d'ores et déjà que 10 millions de personnes sont susceptibles de s'équiper de l'*iFone*. Dans le secteur de la téléphonie, le taux d'équipement de la population (nombre de détenteurs d'un *iFone* rapporté au nombre de personnes concernées) est fréquemment décrit par une courbe "logistique" (ou courbe en S). Ainsi, l'évolution du taux d'équipement de cette population peut être représentée par la fonction suivante :

$$f(t) = \frac{e^{a+bt}}{1 + e^{a+bt}}$$

La variable t ($t \geq 0$) représente le temps (mesuré en mois), $t = 0$ indique la date de lancement du produit. Les paramètres a et b sont deux réels ($b > 0$)

1. Quel sera le taux d'équipement à la date $t = 0$? Combien de consommateurs disposeront d'un *iFone* à cette date ?
2. Quelle est la limite de cette fonction $f(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$? Que peut-on en conclure sur un plan économique ?
3. D'après une étude portant sur l'adoption passée de produits comparables, les paramètres a et b pourraient prendre les valeurs suivantes : $a = -10$ et $b = 1$
 - (a) Représenter graphiquement la courbe de diffusion prévue de l'*iFone*.
 - (b) Le responsable de la production de *Verte* estime que les coûts liés à la production de l'*iFone* ne seront rentabilisés qu'à partir de 4 millions d'unités produites. Dans combien de mois cet objectif pourra-t-il être rempli ?
 - (c) Les actionnaires de *Verte* ne sont pas satisfaits de l'objectif précédent. Vu les fortes évolutions technologiques et les effets de mode dans ce secteur, ils souhaitent un retour sur investissement plus rapide. Une politique marketing consistant à distribuer gratuitement l'*iFone* à des consommateurs sélectionnés (consommateurs "prescripteurs") *Verte* peut modifier la valeur du paramètre a et ainsi accélérer la diffusion du produit. Pouvez-vous indiquer à l'entreprise combien de *iFones* elle doit distribuer gratuitement pour que l'objectif soit atteint dès le cinquième mois suivant sa mise sur le marché ?

Exercice 6 : Calcul

Soit c un réel tel que $0 < c < 1$

1. Montrer que :

$$\frac{1}{1-c} > 1$$

2. Soit le polynôme $P = c^2 + c + 1$, montrer que

$$P = \frac{1-c^3}{1-c}$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}+$

$$\frac{1-x^3}{1-x} > 0$$