Mathématiques Appliquées
Cours-TD : K. Abdi, M. Huaulmé, B. de Loynes et S. Pommier

TD 3 : suites réelles : application économique et financière

Exercice 1

Calculer les premiers termes des suites suivantes. Déterminer leur sens de variation.

1. $u_n = \sqrt{2n-1}$
2. $v_n = \sqrt{3n^2+n}$
3. $w_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$
4. $z_n = w_n - \frac{1}{(n+1)^2}$

Exercice 2

En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer les propositions suivantes :

1. $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. La suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n+1}$ et$u_0 = 2$ est décroissante.
3. La suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n+1}$ et$u_0 = 1$ est majorée par 2.

Exercice 3

Soit la suite $u_{n+1} = u_n + 5$ avec $u_0 = 1$.

1. Calculer les dix premiers termes de la suite.
2. Déterminer son sens de variation.
3. Cette suite est-elle majorée ou minorée ?
4. Calculer sa limite si elle existe.
5. Calculer la somme des 5 premiers termes de u_n, puis la somme des n premiers termes.
6. Mêmes questions avec la suite définie par $v_{n+1} = 3v_n$ et $v_0 = -1$.

Exercice 4

Calculer le terme général et la limite des suites suivantes :

1-	$u_{n+1} = 10u_n$ et $u_0 = 1$	4-	$u_{n+1} = 0,1u_n$ et $u_0 = -1$
2-	$u_{n+1} = 10u_n$ et $u_0 = -1$	5-	$u_{n+1} = u_n$ et $u_0 = k$
3-	$u_{n+1} = 0,1u_n$ et $u_0 = 1$	6-	$u_{n+1} = 0,1 + u_n$ et $u_0 = -1$

Exercice 5

La suite (u) est définie par la relation :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3} \quad u_0 = 1$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout n, $0 \leq u_n \leq 1$.
2. Démontrer par récurrence que cette suite est décroissante.
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6

Une personne reçoit 200 000 euros en héritage. Le 1er janvier 2007 elle a placé cette somme au taux annuel de 7,5%.

1. En supposant que les intérêts sont réinvestis tous les ans, de quelle somme dispose cette personne au 1er janvier 2008 ? au 1er janvier 2009 ?
2. Ecrire la valeur du capital accumulé l'année n en fonction de la valeur du capital accumulée en $n-1$.
3. Ecrire la valeur du capital accumulé l'année n en fonction de la durée du placement (n années). En déduire la valeur du capital au bout de 12 ans.
4. Mêmes questions 1, 2,3, si l'on suppose que le capital n'est pas réinvesti.
5. Montrer par récurrence que le capital accumulé est supérieur lorsque les intérêts sont réinvestis que lorsqu'ils ne le sont pas pour $n > 1$.
6. Une publicite annonce : *"Gagnez de l'argent avec le placement G-Epargne" qui double votre capital en 12 ans !"*.

   (a) Ce placement est-il plus intéressant que le précédent ? (on supposera que les intérêts sont réinvestis).

   (b) Déterminer le taux d'intérêt annuel du placement G-Epargne, sachant qu'il s'agit d'un placement à intérêts composés.

Exercice 7

Un individu dispose d'un salaire net mensuel de 1500 euros (son seul revenu). Il souhaiterait constituer un capital pour acheter une voiture. Sa capacité d'épargne est estimée à 20% de son salaire. Sa banque lui propose un placement très attractif au taux d'intérêt net de 2%.

1. Quelle sera la valeur du capital placé après un 1 mois ? 2 mois, 3 mois ?
2. En déduire la progression mois après mois du capital (mois m en fonction du mois $m-1$) ?

3. Déterminer la valeur du capital K_m après m mois de placement.

4. Quel sera la valeur du capital après 3 ans de placement.

5. Au bout de combien de temps cet individu disposera-t-il d'un capital de 10 000 euros ?

Exercice 8

Le Département prospectif de l'INSEE souhaite prévoir l'évolution du niveau de vie de la population française dans le long terme. Pour cela il utilise l'indicateur du PIB réel par habitant. l'INSEE parvient à établir 2 scénarios typiques pour la progression du PIB nominal, de niveau des prix et du nombre d'habitants.

Taux de croissance	Scénario optimiste	Scenario pessimiste
PIB nominal (g)	6%	3,5%
Niveau des prix (p)	2%	4%
Population (n)	0,5%	0,5%

On retient 2007 comme année de référence où les indicateurs économiques ont pris les valeurs suivantes :

- PIB nominal : $PIB_0 = 1800$ milliards d'euros.
- Niveau des prix : $NGP_0 = 100$.
- Population : $POP_0 = 63$ millions.

1. Ecrire l'équation de récurrence des suites PIB_t, NGP_t, et POP_t.

2. Soit YR_t le PIB réel par habitant dans t année après 2007. Déterminer l'équation de récurrence de la suite YR_t

3. Déterminer le terme général de la suite YR_t.

4. A l'aide des questions précédentes, calculer les valeurs du PIB réel par habitant en 2020 dans le scenario optimiste puis dans le scénario pessimiste.

5. L'INSEE retient finalement un scenario "intermédiaire" tel que $g = 4\%$, $p = 3\%$ et $n = 0,5\%$. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer le taux de croissance du PIB réel par habitant entre 2007 et 2020. Quel serait l'impact d'une augmentation d'un point du taux de croissance du PIB nominal sur le niveau de vie en 2020 ?

Exercice 9

Une prime d'assurance automobile évolue au cours du temps en fonction notamment du coefficient de bonus-malus, ainsi $P_t = b_t \times A$ où A est la prime de base demandée par l'assureur, P_t la prime effectivement payée par l'assurée en fonction de son coefficient de bonus malus b_t. On pose les règles suivantes :

- Chaque année sans sinistre responsable entraîne une diminution de 5% du coefficient de bonus-malus
- Chaque sinistre responsable entraîne une augmentation du coefficient de 25%,
- Le coefficient de bonus malus ne peut excéder $3,5$ ni ne peut être inférieur à $0,5$

1. Partant d'un coefficient $b_0 = 1$, au bout de combien d'années, sans sinistre responsable obtient-on le bonus maximal ?
2. En déduire le cumul des cotisations versées jusqu'à cette date.
3. Une personne dont le bonus est de $0,6$ vient de causer un accident dont elle est responsable à 100%. En déclarant le sinistre elle doit verser une franchise forfaitaire de 400 euros et subir un malus. Si elle ne déclare pas le sinistre elle doit assumer la charge des réparations évaluées à 800 euros.

   (a) Que coûteront les primes des 5 prochaines années si cette personne ne déclare pas le sinistre en supposant qu'elle n'en provoque pas d'autres ?

   (b) Même question si cette fois elle déclare le sinistre

   (c) Sous réserve que ce conducteur n'ait pas d'accident les 5 prochaines années, que lui conseillez-vous ?

Exercice 10

En épidémiologie, l'étude de la propagation d'une infection parmi une population est souvent réalisée à partir de modèle logistique (modèle de Verhulst). L'idée est qu'une population (par exemple touchée par une maladie) n'a une croissance proportionnelle à sa taille(progression arithmétique) que lorsque cette taille est limitée, par la suite certains facteurs limitent la progression de la maladie (épuisement des modes de transmission, modificiation des comportements...). Considérons p_t la proportion de la population infectée à la date t, avec $0 \leq p_t \leq 1$. La suite logistique est donnée par :

$$p_{t+1} = \frac{5}{2}p_t(1 - p_t)$$

On considère $p_0 = 0,1$

1. Etudier le sens de variation et les extrema de la fonction f définie par $f(x) = \frac{5}{2}x(1-x)$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$
2. Calculer les premiers termes de la suite pour déterminer la date à laquelle le pic de contamination (maximum de la population infectée) est atteint ?
3. Déterminer la limite de la suite logistique.
4. Recommencer la question 2 en supposant désormais que $p_0 = 0,05$. Interpréter.

Exercice 11

Soit (u_n) une suite de nombres réels définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

et $u_0 = 2/3$.

Soit la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n\sqrt{2} - n$$

1. Calculer u_1 et u_2
2. Montrer que v_n peut s'écrire comme une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Calculer son premier terme v_0.
3. A partir de ce résultat, calculer v_n puis u_n en fonction de n.
   La suite (u_n) est elle convergence ?
4. Soit la suite (S_n) définie par :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

   Calculer S_n en