CC1 du 12/11/2013. Corrigé.

Exercice 1

1. Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est arithmétique, alors la différence de deux termes consécutifs est constante, et plus généralement on a pour $n, p \geq 0$:
$$u_{n+p} - u_n = pr$$
où r est la raison de la suite. On calcule
$$u_{12} - u_2 = -38 - 2 = -40 \Longrightarrow r = -40/10 = -4.$$
D'autre part, une suite arithmétique satisfait $u_n = nr + u_0$ pour tout $n \geq 0$. On en déduit $u_2 = 2r + u_0 \Longleftrightarrow u_0 = u_2 - 2r$. Or, ici, $u_2 = 2$ et $r = -4$, donc $u_0 = 10$.

2. On cherche $n \geq 0$ tel que $u_n \leq -90$, or $u_n = -4n + 10$, d'où
$$-4n + 10 \leq -90 \Longleftrightarrow -4n \leq -100 \Longleftrightarrow n \geq \frac{-100}{-4} = 25.$$

Exercice 2

1. Cette fois-ci $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique, donc le rapport de deux termes consécutifs est constant, ou plus généralement, pour $n, p \geq 0$
$$\frac{u_{n+p}}{u_n} = q^p,$$
où q est la raison de la suite. Ici, on obtient
$$\frac{u_3}{u_1} = \frac{27}{2}\frac{2}{3} = 9 = q^2.$$
On déduit ainsi que $q = \pm 3$. Or, $u_n = u_0 q^n$, et on obtient par exemple $u_1 = qu_0$, d'où, si $q = 3$, $u_0 = 1/2$, et si $q = -3$, alors $u_0 = -1/2$.

2. Commençons par le cas $q = 3$, et cherchons $n \geq 0$ tel que $u_n \geq 30$. Cela se réécrit
$$\frac{3^n}{2} \geq 30 \Longleftrightarrow n \geq \frac{\log 60}{\log 3},$$
car $\log(3) > 0$. On décompose 60 en facteurs premiers, d'où
$$\frac{\log 60}{\log 3} = 1 + 2\frac{\log 2}{\log 3} + \frac{\log 5}{\log 3}.$$
Et avec les valeurs approchées données dans l'exercice, on a $\frac{\log 60}{\log 3} \approx 3,7$. Ainsi $u_n \geq 30$ pour $n \geq 4$.

   Pour le cas $q = -3$, en notant $v_n = -\frac{1}{2}(-3)^n$, on remarque que $v_{2n} \leq 0$ et que $v_{2n+1} = u_{2n+1}$. Ainsi, $v_n \geq 30$ pour les entiers n impaires supérieurs ou égaux à 5.

Exercice 3

1. En termes de suite, on obtient $u_{n+1} = u_n + \frac{25}{100}u_n$, d'où
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,25.$$
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ décrivant le problème est une suite géométrique de raison $q = 1,25$ et de germe $u_0 = 4000$.

2. On calcule $u_2 = u_0(1,25)^2 = 4000\frac{25}{16} = 6250$.

3. On cherche l'année $n \geq 0$ pour laquelle $u_n \geq 4u_0$, on obtient l'inégalité $\left(\frac{5}{4}\right)^n \geq 4$, par suite $n \geq \frac{\log(4)}{\log(5/4)}$ car $\ln(5/4) > 0$. La population aura donc quadruplé à partir de 2007.

Exercice 4

1. La fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+$, aussi $x \in \mathbb{R}$ doit vérifier

$$2x+4>0 \text{ et } x-1>0 \text{ et } (x-1)^2>0,$$

d'où

$$x>-2 \text{ et } x>1 \text{ et } x \neq 1.$$

Finalement l'équation ne fait sens que pour $x>1$. On résoud :

$$\begin{array}{rrcl} & 2\ln(2x+4)+\ln(x-1) & = & \ln(4(x-1)^2) \\ \iff & \ln(2x+4)^2(x-1) & = & \ln(4(x-1)^2) \\ \iff & (2x+4)^2(x-1) & = & 4(x-1)^2, \text{ car la fonction } \ln \text{ est injective,} \\ \iff & (x-1)((2x-4)^2-4(x-1)) & = & 0 \\ \iff & 4(x-1)(x^2-5x+5) & = & 0. \end{array}$$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. De plus, on remarque que le polynôme x^2-5x+5 n'a pas de racines. Donc l'unique solution de cette dernière équation est $x=1$. Mais 1 n'est pas une solution licite pour l'équation initiale. Cette dernière n'a donc pas de solution réelle.

2. La fonction exponentielle étant définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, cette équation est bien définie sur $\mathbb{R}$.

On pose $X=e^x$, et on réécrit l'équation

$$4X^2-4X-1=0.$$

Le discriminant est donné par $\Delta=b^2-4ac$ et vaut ici 0. Ce trinôme possède donc une racine double $X=\frac{1}{2}$. Ceci implique que $x=-\ln(2) \in \mathbb{R}$ est l'unique solution de l'équation initiale.

Exercice 5

1. Soit $f(x)=3x^4+2x^3+6x^2+10$, on trouve pour la dérivée

$$f'(x)=12x^3+6x^2+12x=6x(2x^2+x+2).$$

2. La dérivée de $f(x)=\sqrt{\frac{1}{4}x^2+1}$ est donnée par

$$f'(x)=\frac{x}{4\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}}.$$

3. Pour $f(x)=\ln(x^2+2x+1)$, on calcul comme dérivée

$$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+1}=\frac{2}{x+1}.$$

4. La fonction $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$ se dérive en

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}.$$

5. Enfin pour $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+2x}$, on obtient

$$f'(x)=\frac{2x(x+1)(x+2)-2(x+1)^3}{x^2(x+2)^2}=\frac{(x+1)(2x^2+4x-2x^2-4x-2)}{x^2(x+2)^2}=\frac{-2}{x^2(x+2)^2}.$$