CC1 du 15/11/2013. Corrigé.

Exercice 1

1. La différence entre deux termes consécutifs d'une suite arithmétique est constante, et plus généralement pout $n, p \geq 0$, on a $u_{n+p} - u_n = pr$, où r est la raison de cette suite. Ici, $u_{12} - u_2 = 30 = 10r$, d'où le raison de la suite est $r = 3$.

   Une suite arithmétique satisfait également $u_n = nr + u_0$ pour $n \geq 0$. On a par exemple $u_2 = 2r + u_0$ d'où $u_0 = u_2 - 2r = -20 - 6 = -26$.

2. On cherche $n \geq 0$ pour lequel $u_n \geq 46$, en remplaçant u_n par son expression, on est amené à considérer l'inégalité $3n - 26 \geq 46$, d'où $n \geq 24$.

Exercice 2

1. Le rapport de deux termes consécutifs d'une suite géométrique est constante, et plus généralement, on a

$$\frac{u_{n+p}}{u_n} = q^p, \text{ pour tout } n, p \geq 0.$$

   Ici, on calcule $q^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{1}{8}$, aussi $q = \frac{1}{2}$. D'autre part, une suite géométrique s'écrit $u_n = u_0 q^n$ à l'aide de la raison, ici, par exemple $u_2 = u_0 q^2$, d'où $u_0 = u_2 q^{-2} = 4$.

2. On cherche $n \geq 0$ tel que $u_n \leq \frac{1}{100}$, en remplaçant u_n par son expression, on obtient $4\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{100}$. Il vient alors que $n \geq \frac{-\ln 400}{-\ln 2}$ car $\ln\frac{1}{2} < 0$. On décompose 400 en produit de facteurs premiers, $400 = 2^4 5^2$, on obtient alors l'expression

$$\frac{-\ln 400}{-\ln 2} = 4 + 2\frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 8,6$$

   en utilisant la valeur approchée donnée dans l'exercice. Ainsi $u_n \leq \frac{1}{100}$ si et seulement si $n \geq 9$.

Exercice 3

1. La diminution de 10% par an de la population de cette ville se traduit en termes de suite par la relation de récurrence suivante

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{10}u_n = u_n(1 - \frac{1}{10}) = \frac{9}{10}u_n.$$

   Par conséquent, la suite décrivant le phénomène est de nature géométrique, sa raison et son premier terme sont donnés respectivement par $\frac{9}{10}$ et $u_0 = 10000$.

2. La réponse à la question précédante implique que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ s'écrit en fonction de n, $u_n = 10000\left(\frac{9}{10}\right)^n$. Aussi la population en 2002 est donnée par

$$u_2 = 10000\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{10000 \cdot 81}{100} = 8100.$$

3. Il s'agit de trouver $n \geq 0$ tel que $u_n \leq 5000$, et il vient

$$\begin{array}{rrcl} & 10000\left(\frac{9}{10}\right)^n & \leq & 5000 \\ \iff & n & \geq & \frac{-\ln 2}{\ln(9/10)} \end{array}$$

   car $\ln(9/10) < 0$. À l'aide de la valeur approchée donnée, on trouve $n \geq 6,6$, soit à partir de 2007.

Exercice 4

1. La fonction ln n'est définie que pour les réels strictement positifs, aussi, la solution éventuelle de cette équation doit satisfaire
$$2x+4>0 \text{ et } x+1>0 \text{ et } 4(x+1)^2>0,$$
ou de manière équivalente
$$x>-2 \text{ et } x>-1 \text{ et } x\neq -1.$$
Donc, le domaine de $\mathbb{R}$ des solutions admissibles est $]-1,\infty[$.

   On résoud
$$\begin{array}{rrcl} & 2\ln(2x+4)+\ln(x+1) &=& \ln 4(x+1)^2 \\ \Longleftrightarrow & \ln(2x+4)^2(x+1) &=& \ln 4(x+1)^2 \\ \Longleftrightarrow & (2x+4)^2(x+1) &=& 4(x+1)^2 \text{ car ln est injective} \\ \Longleftrightarrow & (x+1)((2x+4)^2-4(x+1)) &=& 0 \\ \Longleftrightarrow & 4(x+1)(x^2+3x+3) &=& 0. \end{array}$$
Un produit est nul si l'un des facteurs est nul, or, on remarque que le discriminant du trinôme $\Delta = b^2-4ac<0$, ainsi l'unique solution réelle de cette dernière équation est $x=-1$. Mais l'équation donnée initialement n'est pas définie pour un tel x, aussi l'équation initiale n'admet pas de solution réelle.

2. La fonction exponentielle est bien définie pour tout réel, et donc le domaine des solutions réelles admissibles est $\mathbb{R}$.

   On réalise le changement de variable $X=e^x$, et l'équation se transforme en $2X^2+X-1=0$ que l'on sait résoudre en X. Le disriminant est donné par $\Delta=b^2-4ac=1+8=9$. Ce trinôme possède donc deux racines distintes
$$X_- = -1 \text{ et } X_+ = \frac{1}{2}.$$
Une exponentielle est néanmoins positive, on jette donc la solution $X_-=-1<0$, et il reste une unique solution à l'équation initiale $x=-\ln(2)$.

Exercice 5

1. Soit $f(x)=-x^4+x^3-2x^2+13$, la fonction dérivée est
$$f'(x)=-4x^3+3x^2-4x=-x(4x^2-3x+4).$$

2. Pour $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}x^2+4}$, on trouve
$$f'(x)=\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2}{2}+4}}.$$

3. Ensuite, la dérivée de $f(x)=\ln(x^2-2x+1)$ est donnée par
$$f'(x)=\frac{2(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{2}{x-1}.$$

4. La dérivée de $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$ est
$$f'(x)=\frac{-1}{4\sqrt{x}\sqrt{1-\sqrt{x}}}.$$

5. Enfin, pour la dérivée de $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2-1}$, on trouve
$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2(x^2-1)-2x(x+1)^3}{(x^2-1)^2}=\frac{(x+1)^3(3(x-1)-2x)}{(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{x+1}{x-1}.$$