

Exercice 1. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x - 18$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$$

1. Etude du polynôme P

a) Montrer que 3 est racine de P

b) Trouver a, b et c tels que $P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$

c) Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$

2. Etude de la fonction f

a) Trouver les réels α et β tels que

$$f(x) = x + \frac{\alpha}{x + 1} + \frac{\beta}{x - 1}$$

b) Déterminer les limites de f au bord de son domaine de définition

c) Dériver f et établir le tableau de variations de f dûment rempli.
(On pourra utiliser le 1.c) pour étudier le signe de f')

d) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f

e) Dessiner le graphe de la fonction f en faisant apparaître les différentes propriétés de la fonction f (asymptote, tangente horizontale...).