Mathématiques Appliquées
Cours-TD : K. Abdi, M. Huaulmé, B. de Loynes et S. Pommier

Limites

Calcul de la limite de la somme de deux fonctions :

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)$
l	m	l+m
$+\infty$	m	$+\infty$
$-\infty$	m	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminé

Calcul de la limite du produit de deux fonctions :

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)$
l	m	$l\cdot m$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	l, $(l>0)$	$+\infty$
$+\infty$	l, $(l<0)$	$-\infty$
$-\infty$	l, $(l>0)$	$-\infty$
$-\infty$	l, $(l<0)$	$+\infty$
$+\infty$	0	indéterminé
$-\infty$	0	indéterminé

Calcul de la limite de l'inverse d'une fonction :

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Dérivées usuelles

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	f' est définie sur
a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n, $n\in\mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
$\exp x$	$\exp x$	$\mathbb{R}$

Soient $u, v :]a,b[\to \mathbb{R}$ dérivables sur $]a,b[$, alors

- $(u+v)' = u' + v'$,
- $(ku)' = ku'$, $k \in \mathbb{R}$,
- $(uv)' = u'v + uv'$,
- si pour $x \in]a,b[$, $v(x) \neq 0$, alors $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$ et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On rappelle que $(f \circ u)(x_0) = f(u(x_0))$ dès que x_0 est dans le domaine de définition de u et $u(x_0)$ dans celui de f.

Théorème 1 *Si u est une fonction dérivable en x_0, et f une fonction dérivable en $u(x_0)$, alors la fonction $f \circ u$ est dérivable en x_0 et :*

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0)$$

Application :

$f(x)$	$f'(x)$	$f \circ u$	$(f \circ u)' = f' \circ u \cdot u'$
x^2	$2x$	u^2	$2uu'$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}	u^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	$nu^{n-1}u'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{x}$, $x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$, $u > 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\log x,\ x > 0$	$\frac{1}{x}$	$\log u$	$\frac{u'}{u}$
$\exp x$	$\exp x$	$\exp u$	$\exp u \cdot u'$