

CC2 du 08/11/2001. Durée : 1/2 heure.
Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Sujet 2B

Chaque réponse devra faire l'objet d'une justification aussi précise et concise que possible.

Exercice 1

1. Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $a \in \mathbb{R}$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ forment-ils une base de \mathbb{R}^2 ?
2. Donner une base du sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$ de \mathbb{R}^3 .
3. Calculer le noyau de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Est-elle inversible?
4. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant $\frac{\partial g}{\partial x}(2, 3) = 4$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(2, 3) = 3$. Calculer $f'(1)$ où la fonction f est donnée, pour $t \in \mathbb{R}$, par $f(t) = g(t^2 + t, 2t + 1)$.
5. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $g(x) = x^2 + 1$. Pour quelle valeur de a et b la droite d'équation $y = (x - 1)a + b$ est-elle tangente au graphe de g au point $(1, 2)$?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$ par

$$f(x, y, z) = 2z(xy)^{1/2} - 2z^{1/2}x^{3/2}.$$

1. Donner le gradient de f .
2. Donner le développement limité d'ordre 1 au voisinage du point $(4, 4, 9)$, et en déduire une valeur approchée de $f(3.9, 4.1, 9.1)$.
3. Montrer que f est homogène et en déduire une égalité vérifiée par la somme des élasticités de f .