Correction

4 novembre 2008

On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients non constants

$$(1-x^2)y' - xy = 0$$

Supposons que y soit développable en série entière au voisinage de 0. Alors y s'écrit

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

On suppose en outre que le rayon R de cette série est strictement positif. L'équation différentielle nous donne des relations de récurrence sur les $(a_n)_{n\geq 0}$. En effet, si on dérive y sur son intervalle de convergence et que l'on réinjecte y et y' dans l'équation on obtient :

$$\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n+1} - \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = 0$$

soit

$$a_1 + (2a_2 - a_0)x + \sum_{n\geq 1} \left[(n+2)a_{n+2}x^{n+1} - n a_n x^{n+1} - a_n x^{n+1}\right] = 0$$

Ceci implique que $a_1 = 0$, $2a_2 = a_0$ et $(n+2)a_{n+2} = (n+1)a_n$. Tout d'abord, puisque $a_1 = 0$, il vient que $a_n = 0$ si n est impair. A l'aide d'une récurrence immédiate, on obtient

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2}\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}a_0 \\ &= \prod_{k=0}^{n}\frac{n-k+1}{n-k+2}a_0 \end{aligned}$$

Essayons de simplifier cette expression. Rappelons que

$$\begin{aligned} (2n)! &= (2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(1) \\ &= 2^n n!(2n-1)(2n-3)\cdots(1) \end{aligned}$$

Posons $n = 2k$, alors

$$\begin{aligned}(n+1)(n-1)(n-3)\cdots(1) &= (2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots(1)\\ &= \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(n+2)n(n-2)\cdots(2) &= (2k+2)(2k)(2k-2)\cdots(2)\\ &= 2^{k+1}(k+1)!\end{aligned}$$

d'où

$$a_{n+2} = \frac{(n+2)!}{[(\frac{n}{2}+1)!]^2 2^{n+2}} a_0$$

Il vient donc que

$$y_{a_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}$$

C'est alors un exercice de montrer que le rayon de convergence de cette série est $R = 1$.

Cette équation différentielle est linéaire d'ordre 1, l'espace des solutions est donc un espace vectoriel de dimension 1 (le montrer ?). La série entière calculée au dessus ne dépend essentiellement que du paramètre a_0, ainsi a-t-on obtenu toutes les solutions de cette équation au voisinage de 0. En substance $a_0 = y(0)$.

On a fixé notre condition initiale au temps $t = 0$, dans un cadre plus général, le raisonnement est identique. En effet, supposons posée comme condition initiale $a_0 = y(t_0)$ pour un certains temps t_0. Le calcul précédant reste identique, simplement aura-t-on une solution de la forme

$$y(x) = \sum_{k\geq 0} a_{2k}(x-t_0)^{2k}$$

définie sur l'intervalle $]t_0 - 1; t_0 + 1[$.