Correction de l'exercice 13

On étudie la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = -z^3 + \frac{3}{2}z^2 + y^2 + x^2 + xy - x - y$. Le gradient de f est donné par

$$\nabla f(x,y,z) = (2x + y - 1, 2y + x - 1, -3z^2 + 3z)$$

Les points stationnaires sont données par les solutions de $\nabla f(x,y,z) = 0$, c'est à dire,

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 2y + x - 1 = 0 \\ -3z^2 + 3z = 0 \end{cases}$$

En soustrayant deux fois la première ligne à la seconde, le système devient

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ -3x - 3 = 0 \\ -3z^2 + 3z = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne $x = -1$. Puis, en remplacant x par sa valeur dans la première équation, on obtient $y = 3$. Enfin, la troisième équation se réécrit $-3z(z-1) = 0$, d'où $z = 0$ ou $z = 1$. Ainsi, les deux points stationnaires de f sont $(-1,3,0)$ et $(-1,3,1)$.

La matrice hessienne de f est donnée par $\nabla^2 f(x,y,z) = (\partial_{i,j} f(x,y,z))_{1 \leq i,j \leq 3}$. Or,

- $\partial_{1,1} f(x,y,z) = 2$,
- $\partial_{1,2} f(x,y,z) = 1$,
- $\partial_{1,3} f(x,y,z) = 0$,
- $\partial_{2,2} f(x,y,z) = 2$,
- $\partial_{2,3} f(x,y,z) = 0$ et,
- $\partial_{3,3} f(x,y,z) = -6z + 3$,

ainsi, la hessienne de f au point $(-1,3,0)$ est donnée par

$$\nabla^2 f(-1,3,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et celle au point $(-1,3,1)$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $\nabla^2 f(-1,3,0)$ est donné par $(3-\lambda)^2(1-\lambda)$ et donc les valeurs propres de $\nabla^2 f(-1,3,0)$ sont 3, 3 et 1. Il vient alors que $(-1,3,0)$ est un minimum local.

Le polynôme caractéristique de $\nabla^2 f(-1,3,1)$ est donné par $(3+\lambda)^2(1-\lambda)$ et donc les valeurs propres de $\nabla^2 f(-1,3,1)$ sont -3,-3 et 1. Le point $(-1,3,1)$ est donc un point-selle.